LA II Jordan-Normalform

A1.1 ϕ-invariante Unterräume

$\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, ein Endomorphismus (Definitionsbereich = Wertebereich)

$P_\phi(X)$: char. Polynom $\quad P_\phi(X) = \det(\phi - I_d)$ ← Einheitsmatrix
$\quad = \det(D(\phi) - X \cdot I_n)$
mit Matrizen

Cayley-Hamilton: $P_\phi(\phi) = 0$ (Abbildung)
$P_\phi(A) = 0$ (Matrix) mit $A = D_{BB}(\phi)$

$f(X), g(X)$: zwei Teiler des $P_\phi(X)$, $U = \ker(f(\phi))$
$W = \ker(g(\phi))$

b) Falls $f(X)$: Einheit, was ist dann $U = \ker(f(\phi))$?

$f(x) = 1 \cdot x^0 = 1$ (Zahl); $f(\phi) = id = \phi^0$ (Abbildung), $f(A) = I_n = A^0$ (Matrix)

$\Rightarrow \ker(f(\phi)) = \ker(id) = \{0\}$

- Zwischenbsp: $f(x) = x = x^1$ Dann ist $f(\phi) = \phi^1$ $\quad \ker(f(\phi)) = \ker(\phi)$
$f(A) = A^1$

- $f(x) = P_\phi(x) \Rightarrow f(\phi) = 0$ (Abbildung)
$\Leftrightarrow (f(\phi))(x) = 0$ (Vektor) $\forall x \in \mathbb{R}^n$
$\Rightarrow \ker(f(\phi)) = \mathbb{R}^n$

Zwischenbemerkung
ϕ: Abbildung $V \xrightarrow{\phi} V$

Notation: $\phi^n = \underbrace{\phi \circ \phi \circ \phi \circ \phi \circ \dots \circ \phi}_{n\text{-mal}}$

$\phi^0 = Id$

Polynom: $f(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$
$f(\phi) := a_0 \cdot Id + a_1 \phi + \dots + a_n \phi^n$
eine Abbildung mit Auswertung
$f(\phi)(x) = a_0\, Id(x) + a_1 \phi(x) + \dots + a_n \phi^n(x)$
Für Matrizen
$f(A) = a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_n A^n$

a) $f(x)$: ein beliebiges Polynom
Abbildung $f(\phi): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

d.h. $\forall x \in U$ gilt $\phi(x) \in U$

Zeige $\ker(f(\phi)) = U$ ist ϕ-invarianter UVR

$x \in \ker(a_0 \cdot Id + a_1 \phi + \dots + a_n \phi^n)$
$\Leftrightarrow \underbrace{(a_0 \cdot Id + a_1 \phi + \dots + a_n \phi^n)(x)}_{(f(\phi))(x)} = 0$

Zeige dass $\phi(x) \in \ker(f(\phi)) = U$
Berechne $(f(\phi))(\phi(x)) = (a_0 Id + a_1 \phi + \dots + a_n \phi^n)(\phi(x))$
$= a_0 \phi(x) + a_1 \phi^2(x) + \dots + a_n \phi^{n+1}(x)$
$\overset{\phi\text{-linear}}{=} \phi(\underbrace{a_0 Id(x) + a_1 \phi(x) + \dots + a_n \phi^n(x)}_{=0})$
$= \phi(0) \overset{\phi\text{-linear}}{=} 0$

$\Rightarrow \phi(x) \in U \Rightarrow U$ ist ϕ-invariant $\square$

BRUNNEN

Die Jordansche Normalform

geg.: $A \in K^{n \times n}$ (meist $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$) ges.: JNF von A

$\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$: Eigenwerte von A

Algebraische Vielfachheiten: $\mu_a(\lambda_1), \ldots, \mu_a(\lambda_k)$
angenommen $\mu_a(\lambda_1) + \ldots + \mu_a(\lambda_k) = n$ (in $\mathbb{C}$ immer!)

$$JNF(A) = \begin{pmatrix} \boxed{J_{\lambda_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_{\lambda_k}} \end{pmatrix}$$

Jordan-Block zu Eigenwert λ_k

Aufbau eines Jordanblocks J_λ

J_λ bestehen aus Jordan-Kästchen der Form $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$ Kästchen der Größe nach absteigend sortiert!

Anzahl der $p \times p$-Kästchen:

$$\mathrm{Rang}(A-\lambda I_n)^{p-1} - 2\,\mathrm{Rang}(A-\lambda I_n)^p + \mathrm{Rang}(A-\lambda I)^{p+1}$$
$$= -\dim(K_{p-1}) + 2\dim(K_p) - \dim(K_{p+1})$$

$K_p := \mathrm{Kern}(A-\lambda I)^p$: p-te Kern

~~Hauptraum~~ Hauptraum

Es gilt $\underbrace{K_0}_{\{0\}} \subset \underbrace{K_1}_{\mathrm{Eig}(\lambda)} \subset K_2 \subset K_3 \subset \ldots \subset K_q = K_{q+1} = H_\lambda$ mit Index $q := q(H_\lambda)$

- $q(H_\lambda) \leq \mu_a(\lambda)$
- Max Kästchengröße ist $q(H_\lambda)$
- Falls $\forall \lambda$ $H_\lambda = \mathrm{Eig}(\lambda)$, dann ist die Matrix diagonalisierbar.
- $\dim(H_\lambda) = \mu_a(\lambda)$
- Hauptraumzerlegung $V = H_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus H_{\lambda_k}$
- Char. Polynom $P_A = \det(A - X I_n) \overset{\text{in } \mathbb{C} \text{ immer möglich}}{=} (-1)^n (X-\lambda_1)^{\mu_a(\lambda_1)} (X-\lambda_2)^{\mu_a(\lambda_2)} \cdot \ldots \cdot (X-\lambda_k)^{\mu_a(\lambda_k)}$
  Es gilt $P_A(A) = 0$
- Minimalpolynom: $m_A = (X-\lambda_1)^{q(H_{\lambda_1})} (X-\lambda_2)^{q(H_{\lambda_2})} \cdot \ldots \cdot (X-\lambda_k)^{q(H_{\lambda_k})}$

geometrische VF = Anzahl Jordankästchen = $\dim(\mathrm{Eig}(\lambda))$

Basiswechsel zur JNF

1) Berechne die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_k$

2) Für Eigenwert λ:

Berechne die Kerne
$$K_1 = \ker(A-\lambda I) = [\underbrace{b_1, \dots, b_n}_{\text{Vektoren der Stufe 1}}]$$
$$K_2 = \ker(A-\lambda I)^2 = [b_1, \dots, b_n, \underbrace{b_{n+1}, \dots, b_{n2}}_{\text{Stufe 2}}]$$
$$\vdots$$
$$K_q = K_{q+1} = \ker(A-\lambda I)^q = [b_1, \dots, b_{n_{q-1}}, \underbrace{b_{n_{q-1}+1}, \dots, b_m}_{\text{Vektoren der Stufe } q}]$$
$m = \mu_a(\lambda)$

Beachte: Falls b ein Vektor der Stufe l ist, so ist $(A-\lambda I)b$ ein Vektor der Stufe $l-1$

Initialisierung: $L_\lambda = (\ )$: eine leere Liste

Für $l = q, q-1, \dots, 2, 1$

Falls $b \in H_\lambda$ mit Stufe l existiert und $b \notin [L_\lambda]$,

ergänze die Liste L_λ: $\cancel{L_\lambda = (L_\lambda, (A-\lambda I)^{l-1}b, \dots, (A-\lambda I)^2 b, (A-\lambda I)b, b)}$

$$L_\lambda = (L_\lambda, (A-\lambda I)^{l-1}b, \dots, \underbrace{(A-\lambda I)b}_{\text{Stufe } l-1}, \underbrace{b}_{\text{Stufe } l})$$

L_λ beinhaltet die Basisvektoren zum Jordanblock J_λ

BRUNNEN

Gram-Schmidt-Orthogonalisierung

Geg: l.u. Vektoren $c_1, c_2, \dots, c_n$

Ges: orthogonale Vektoren $b_1, b_2, \dots, b_n$ bzw orthonormale Vektoren $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_n$ mit der Eigenschaft $[b_1, \dots, b_k] = [c_1, \dots, c_k]$

1.) Setze $b_1 = c_1$

2.) Für $j = 2, \dots, n$ $\quad b_j = c_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle c_j, b_i \rangle}{\langle b_i, b_i \rangle} \cdot b_i$

3.) Normierung $\tilde{b}_i = \frac{1}{\|b_i\|} \cdot b_i$

Orthogonales Komplement

$M \subset V$, eine Menge an Vektoren

$$M^\perp = \{ x \in V \mid x \perp M \} = \{ x \in V \mid x \perp y \ \forall y \in M \} = \{ x \in V \mid \langle x, y \rangle = 0 \ \forall y \in M \}$$

$$U^\perp = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ \vdots \end{pmatrix}$$

- Ist U ein UVR von V so gilt:

a) $U \subset (U^\perp)^\perp$

b) $U \cap U^\perp = \{0\}$

c) Falls U: endlich dimensional

Dimensionsformel: $\dim(V) = \dim(U) + \dim(U^\perp)$

Orthogonalprojektion

U: endlichdimensional, UVR von V

$B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$: eine ONB von U

$P: V \to U$ heißt Projektion, falls $P^2 = P$

- Orthogonale Projektion

$\pi_U: V = U \oplus U^\perp \to U$

$\pi_U(v) = u$ wenn $v = \underset{\in U}{u} + \underset{\in U^\perp}{u_\perp}$

$\pi_{U^\perp}(v) = u_\perp$

- Berechnungsformel: $\pi_U(v) = \sum_{i=1}^{n} \langle v, b_i \rangle \cdot b_i$
- Abstand zwischen Punkt v und UVR U:

$$d(v, U) = \min\{ \|v - u\| : u \in U \} = d(v, \pi_U(v)) = \|\pi_{U^\perp}(v)\|$$

BRUNNEN

Bilinearform $x,y,z \in V$ $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

Eine Abbildung $s: V \times V \to \mathbb{K}$ heißt Bilinearform, falls

- $s(x+y, z) = s(x,z) + s(y,z)$
- $s(x, y+z) = s(x,y) + s(x,z)$
- $s(\alpha x, y) = \alpha s(x,y)$
- $s(x, \beta y) = \beta s(x,y)$

[Sesquilinearform $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$: $s(x, \beta y) = \overline{\beta} s(x,y)$]

Ab jetzt: V: endlich dimensional, Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$

Fundamentalmatrix einer BLF s:

$$F_B(s) = \begin{pmatrix} s(b_1,b_1) & \cdots & s(b_1,b_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s(b_n,b_1) & \cdots & s(b_n,b_n) \end{pmatrix}$$

Auswertung einer Bilinearform

$$s(v,w) = D_B(v)^T \cdot F_B(s) \cdot D_B(w)$$

Sesquilinearform

$$s(v,w) = D_B(v)^T \cdot F_B(s) \cdot \overline{D_B(w)}$$

Symmetrie

$s: V \times V \to \mathbb{K}$ heißt symmetrisch, falls $s(x,y) = s(y,x)$ bzw $\left(F_B(s) = (F_B(s))^T\right)$

$s: V \times V \to \mathbb{C}$ heißt hermitisch, falls $s(x,y) = \overline{s(y,x)}$ bzw $\left(F_B(s) = \overline{(F_B(s))^T} =: F_B(s)^*\right)$

Radikal $s \in \mathrm{Sym}(V)$

$$\mathrm{rad}(s) := \{ v_0 \in V : s(v_0, v) = 0 \;\; \forall v \in V \}$$

$/\!/ \; s(v, v_0)$

Ausgeartet

s heißt ausgeartet, falls $\mathrm{rad}(s) \neq \{0\}$

V: endlich dimensional: $D_B(\mathrm{rad}(s)) = \mathrm{Kern}(F_B(s))$

Basiswechsel

$$F_B(s) = (D_{CB}(id))^T \, F_C(s) \cdot D_{CB}(id_V)$$

Sesquilinearform

$$F_B = (D_{CB}(id))^T \, F_C(s) \cdot \overline{D_{CB}(id_V)}$$

Bilinearforminvarianten

- Rang
- ausgeartet / nicht ausgeartet
- positiv definit / nicht pos. def.
- symmetrisch / nicht symmetrisch
- Skalarprodukt / kein Skalarprodukt
- Signatur (Anzahl der +/- und 0-Eigenwerte)

BRUNNEN

Beachte: Beachte Basiswechsel
$S^T A S$ bedeutet simultane Zeilen-/Spaltenumformungen

$E = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{11}+a_{12} & -a_{12}+2a_{13} \\ 2a_{21} & a_{21}+a_{22} & -a_{22}+2a_{23} \\ 2a_{31} & a_{31}+a_{32} & -a_{32}+2a_{33} \end{pmatrix}$$

$S^T A$ = die gleichen Zeilenumformungen

Skalarprodukt

ist eine symmetrische, positiv definite Bilinearform

Notation: $s(x,y) = \langle x, y \rangle$

- Induzierte Norm: $\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$
- $u \perp v :\Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0$
- Abstand: $d(u,v) = \|u - v\|$

$s(x,x) > 0, \; x \neq 0$
$\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte von $F_B(s)$ sind positiv
$\Leftrightarrow$ Hurwitz-Kriterium: (für symmetrische und hermitische Matrizen)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \\ a_{21} & a_{22} & \\ & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \det(A_1) \\ \det(A_2) \\ \vdots \\ \det(A_n) \end{matrix}$$

falls alle diese Determinanten > 0 sind, ist A pos. def.

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$|\langle u, v\rangle|^2 \leq \langle u, u \rangle \cdot \langle v, v \rangle$

Standardskalarprodukt

in $\mathbb{R}^n$: $\langle x, y \rangle = x^T y$
in $\mathbb{C}^n$: $\langle x, y \rangle = x^T \bar{y}$

Parallelogrammgleichung (für induzierte Normen)

$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle x, y \rangle}{|x| \cdot |y|} \right)$$

Adjungierte Abbildung

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$, $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W)$
$f: V \to W$
$f^*: W \to V$ ist zu f adjungierte Abbildung, falls

$$\langle f(v), w \rangle_W = \langle v, f^*(w) \rangle_V$$

- $f \in End(V)$ heißt selbstadjungiert, falls $f = f^*$
- Mit Darstellungsmatrizen, ~~falls~~ V, W: endlichdim.

  B: eine ONB in V, C: eine ONB in W

  Es gilt $(D_{CB}(f))^* = D_{BC}(f^*)$ mit $A^* = \bar{A}^T$ für eine Matrix A

  - Falls f selbstadjungiert:

    $D_{BB}(f)$ ist symmetrisch / hermitisch $((D_{BB}(f))^* = D_{BB}(f))$

- Normale Abbildungen: $f \in End(V)$

  f^*: existiert f heißt normal falls $f \circ f^* = f^* \circ f$
  bzw. für Abbildungsmatrizen: $A = D_{BB}(f)$
  $AA^* = A^*A$

Spektralsätze

- $f \in End(V)$, selbstadjungiert (Matrizen: $A = A^*$)
- Alle Eigenwerte sind reell und es gibt eine ONB aus Eigenvektoren

$$\Rightarrow JNF(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = S^{-1}AS = \underbrace{S^*}_{\text{weil ONB}}AS$$

- $f \in End(V)$, normal
  a) $K = \mathbb{C}$, dann gibt es eine ONB aus Eigenvektoren,
  es gibt eine unitäre Matrix $S \in U(n)$: $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist
  b) $K = \mathbb{R}$ V ist orthogonale Summe von ein- und 2-dimensionalen f-invarianten Untervektorräumen

  $$V = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_k \qquad H_i \perp H_j$$

  $\Rightarrow$ es existiert eine orthogonale Matrix $S \in O(n)$, sodass $S^{-1}AS$ eine Blockdiagonalmatrix ist, wobei auf der Diagonalen Eigenwerte (die reellen!) oder Blöcke der Form $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $b \neq 0$ stehen

  (Blöcke entsprechen den komplexen Eigenwerten bzw. den quadratischen Faktoren in χ_A ohne Nullstellen.)

BRUNNEN

Bsp. $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$

$$\chi_A = \underbrace{(2-X)}_{\lambda_1 = 2}\underbrace{(X^2+X+1)}_{\text{keine reellen Eigenwerte}}\underbrace{(X^2+2X+2)}_{\text{keine reellen EW}}$$

Normalform

$$\begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & & \\ & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & & \\ & & & -1 & -1 \\ & & & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X^2 + 1X + 1 = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2) = (X^2 - \lambda_1 X - \lambda_2 X + \lambda_1\lambda_2)$$
$$= X^2 + (-\lambda_1 - \lambda_2)X + \lambda_1\lambda_2$$

$\lambda_1 = \alpha + \beta i \quad \lambda_2 = \alpha - \beta i$

$\lambda_1 + \lambda_2 = 2\alpha \quad \alpha = -\frac{1}{2}$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \alpha^2 + \beta^2 \quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

unitäre Normalform: $\begin{pmatrix} \alpha+\beta i & 0 \\ 0 & \alpha-\beta i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix}$

Reelle Normalform: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ = Eigenwerte

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & -b \\ b & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^2 + b^2 = (a-\lambda)^2 + b^2 = (a-\lambda+ib)(a-\lambda-ib)$$
$$= (a+ib-\lambda)(a-ib-\lambda)$$

$$X^2 + \overbrace{2X}^{-2\alpha} + \overbrace{2}^{\alpha^2+\beta^2} \Rightarrow \text{Block} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\alpha = -1 \Rightarrow \beta = 1$

Isometrien

$(V, \|\cdot\|)$, $(W, |||\cdot|||)$: normierte V-Räume

$f: V \to W$

f heißt Isometrie, falls $|||f(x)||| = \|x\|$ für alle $x \in V$
$\Leftrightarrow |||f(x)|||^2 = \|x\|^2$

- Kriterium für Isometrie in endlichdimensionalen Räumen:

  $f \in \mathrm{End}(V)$, $B = (b_1, \dots, b_n)$: eine ONB

  f ist eine Isometrie $\Leftrightarrow D_{BB}(f) =: A \in O(n)$ oder $D_{BB}(f) =: A \in U(n)$

  $O(n)$: orthogonale Gruppe $A^T \cdot A = I_n$ $\quad$ $U(n)$: unitäre Gruppe $A^T \cdot \bar{A} = I_n$

- $A \in O(n)$ oder $A \in U(n)$ ist immer diagonalisierbar

  $$S^{-1} A S = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$ mit $|\lambda_i| = 1$ für alle $i \in 1 \dots n$

- Isometrie & Skalarprodukt: $(f: V \to W)$

  f ist eine Isometrie
  $\Leftrightarrow \langle f(x), f(y) \rangle_W = \langle x, y \rangle_V$
  $\Leftrightarrow \langle f(x), f(x) \rangle_W = \langle x, x \rangle_V$
  $\Leftrightarrow \langle f(x), f(x) \rangle_W = 1$ für alle $\|x\| = 1$

- Isometrie und Basis:
  f ist eine Isometrie
  $\Leftrightarrow$ für eine ONB in V gilt: $f(B) = C$ ist ONB in W

Die wichtigsten Isometrien:

Drehungen in Ebene $[b_1, b_2]$, $(b_1, b_2, \dots, b_n)$: eine ONB in V

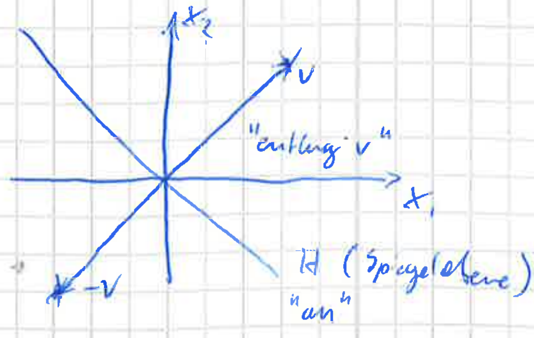
$$D_\varphi = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{matrix}} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Drehkästchen $D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

$Av = -v$

- Spiegelung: $v \in V$, $\|v\| = 1$
  Spiegelung entlang der Achse $[v]$ (an der Hauptachse $[v]^\perp$)
  $\sigma_v : V \to V \quad x \mapsto 2\langle x, v \rangle \cdot v$

In Basis $(v, c_2, c_3, \dots, c_n) = C$
ist die Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$



BRUNNEN

Die Isometrienormalform

„jede Isometrie kann in Drehungen & Spiegelungen zerlegt werden“

Euklidische Normalform: Es existiert eine ONB $\mathcal{B}=(b_1,\dots,b_n)$, $f\in \mathrm{End}(V)$, Isometrie, sodass

$$D_{BB}(f)=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & D_{w_1} & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & D_{w_k} \end{pmatrix} =$$

$$D_{w_i}=\begin{pmatrix}\cos w & -\sin w\\ \sin w & \cos w\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & D_{w_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & D_{w_k} \end{pmatrix}$$

mit Spalte

k-te Spalte

Spiegelung entlang b_k

Spiegelung entlang b_m

j-te Spalte

Drehung in der Ebene $[b_i, b_{i+1}]$

Transpositionstrick zur Bestimmung der Euklidischen INF:

$B=A+A^T$, berechne die Eigenwerte von B: $\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_k\in[-2,2]$

- $\mu=2 \Rightarrow \lambda=1$ ist ein EW von A mit der gleichen Vielfachheit
  $\mathrm{Eig}(B,2)=\mathrm{Eig}(A,1)$
  $B_1=(b_1,\dots,b_{n_1})$: eine ONB von $\mathrm{Eig}(B,2)$

- $\mu=-2 \Rightarrow \lambda=-1$ ist ein EW von A; $\mathrm{Eig}(B,-2)=\mathrm{Eig}(A,-1)$
  $B_{-1}=(\tilde b_1,\dots,\tilde b_{n_2})$ eine ONB von $\mathrm{Eig}(B,-2)$

- Für jedes $\mu\in(-2,2)$ mit Vielfachheit $2l$ sind
  $\lambda=\cos w+i\sin w$ und $\lambda=\cos w-i\sin w$
  Eigenwerte von A mit $2\cos w=\mu$, $w\in(0,\pi)$
  In INF entsteht dadurch Drehkästchen D_w
  $B_w=(x,Ax)$ x: ein Eigenvektor von B zu μ.
  Orthonormalbasis $B_w^N=(\hat b_1,\hat b_2)\leftarrow \begin{cases}\text{aus } (x,Ax)\\ \text{mit Gram-Schmidt}\end{cases}$

Überprüfe die Reihenfolge $\hat b_1,\hat b_2$:

$$\begin{pmatrix} - \hat b_1^T - \\ - \hat b_2^T - \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} | & | \\ \hat b_1 & \hat b_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Falls $b<0$ (dann Rechts positiv), tausche die Reihenfolge und nehme $B_w^N=(\hat b_2,\hat b_1)$

- Die gesucht gesuchte Basis: $B=(B_1,B_{-1},B^N_{w_1},B^N_{w_2},\dots,B^N_{w_k})$