Gero Beckmann

Chomsky-Hierarchie

Typ 0	Wortproblem semi-entscheidbar	$G=(\Sigma,V,S,R)$, R beliebig	universelle Sprache	NTM/DTM akzeptiert L
Typ 1 (kontextsensitiv)	entscheidbar, NP-Schwer	$u\to v$, $\lvert u\rvert\le\lvert v\rvert$, $u\in V^+$, $S\notin v$, $S\to\varepsilon$	$L=\{a^ib^ic^i \mid i\ge 1\}$	NTM mit Platzbedarf n erkennt Wörter der Länge n in L ⇒ NTAPE(n)
Typ 2 (kontextfrei)	polynomiell	$A\to v$, $A\in V$, v beliebig	$L=\{a^ib^i \mid i\ge 1\}$	CYK erkennt L (Chomsky-NF), NPDA
Typ 3 (regulär, rechtslinear)	linear	$A\to v$, $A\in V$, $v\in\{\varepsilon\}\cup\Sigma\cdot V$	$L=\{a^i \mid i\ge 1\}$	NEA/DEA erkennt L

Pumping-Lemma

Erfüllt $L=\{a^{2i}\in\{a,b\}^* \mid i\in\mathbb{N}_0\}$

"∃" Wähle $n=\boxed{2}$

"∀" Betrachte beliebiges $w\in L$ mit $|w|>2$

"∃" Wähle Zerlegung $w=uvx$ mit $u=\boxed{\varepsilon}$, $v=\boxed{aa}$, $x=\boxed{a^{2(j-1)}}$

"∀" Für alle $i\in\mathbb{N}_0$: $uv^ix=a^{2i}a^{2(j-1)}=a^{2(i+j-1)}\in L$

Widerlegen $L=\{a^ib^i\in\{a,b\}^* \mid i\in\mathbb{N}_0\}$

"∀" Betrachte beliebiges $n\in\mathbb{N}$

"∃" Wähle das Wort $w=\boxed{a^nb^n}\in L$. Es gilt $|w|>n$

"∀" Betrachte beliebige Zerlegung $w=uvx\in L$ mit $|uv|\le n$, $v\ne\varepsilon$, dann gilt $u=a^{n-k}$, $v=a^k$, $x=b^n$

"∃" Wähle $i=\boxed{2}$. Zeige $uv^2x\notin L$

$uv^ix=\boxed{a^{n-k}a^{2k}b^n}=a^{n+k}b^n\notin L$

Odgen's Lemma

$\exists n\in\mathbb{N}: \forall z\in L$ mit $|z|>n$:

markiere in z mind. n beliebige Zeichen:

$\exists z=uvwxy$ in der höchstens n markierte Zeichen zu vwx gehören und mind. einer zu vx: $\forall i\in\mathbb{N}_0: uv^iwx^iy\in L$

PL für kontextfreie Sprachen

$\exists n\in\mathbb{N}: \forall z\in L$ mit $|z|>n$:

$\exists z=uvwxy$ mit $|vwx|\le n$, $vx\ne\varepsilon$

$\forall i\in\mathbb{N}_0: uv^iwx^iy\in L$

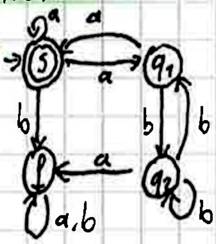
Verallgemeinertes Pumping-Lemma

$\exists n: \forall w\in L$ mit $|w|\ge n$ $\forall pys=w$ mit $|y|=n$

$\exists y=uvx$ mit $v\ne\varepsilon: \forall i\in\mathbb{N}_0: puv^ixs\in L$

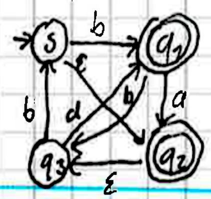
Potenzmengenkonstruktion NEA → DEA

Zustand	a	b
{s}	{s,q1}	{f}
{s,q1}	{s,q1}	{f,q2}
{f}	{f}	{f}
{f,q2}	{f}	{f,q1,q2}
{f,s}	{f,s,q1}	{f}
{f,s,q1}	{f,s,q1}	{f,q2}
{f,q1,q2}	{f,s}	{f,q1,q2}

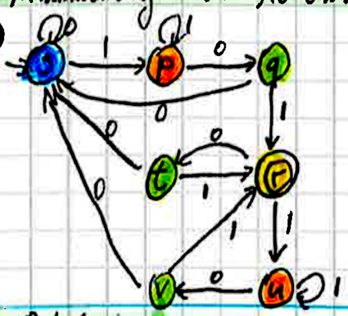


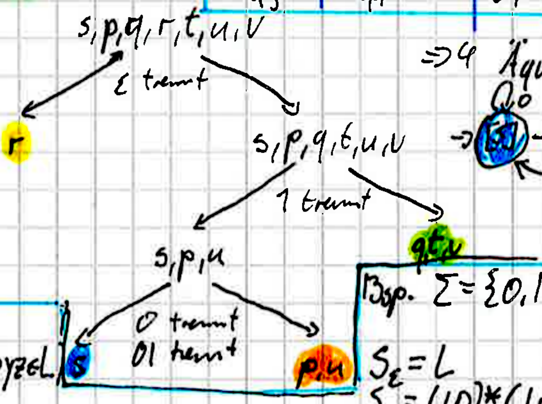
Entfernen von ε-Übergängen

Zustand	a	b
s	q1	s,q1,q2,q3
q1	q2,q3	q3
q2	q1	s, q2,q3
q3	q1	s, q2,q3

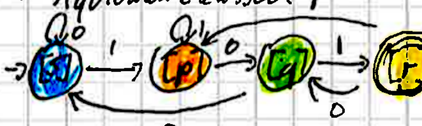


Minimierung von Automaten





⇒ 4 Äquivalenzklassen,



Nerode-Relation

$x,y\in\Sigma^*$, $x\,R_L\,y \Leftrightarrow (\forall z\in\Sigma^*: xz\in L\Leftrightarrow yz\in L)$

$\Leftrightarrow S_x=S_y$

Äquivalenzklasse $[x]=\{y\in\Sigma^* \mid x\,R_L\,y\}$

Gültige Suffixe $S_x=\{z\in\Sigma^* \mid xz\in L\}$

Index ind(R): Anzahl Äquivalenzklassen von Σ^* bezüglich R

Satz von Nerode: L regulär ⇔ $ind(R_L)<\infty$

eg. $[a^i]$ nicht regulär

Bsp. $\Sigma=\{0,1\}$, $L=(0\cup\varepsilon)\cdot(10)^*\cdot(1\cup\varepsilon)$

$S_\varepsilon=L$

$S_0=(10)^*(1\cup\varepsilon)$

$S_1=(01)^*(0\cup\varepsilon)$

$S_{00}=S_{11}=\emptyset$

$S_{01}=(01)^*(0\cup\varepsilon)=S_1$

$S_{10}=(10)^*(1\cup\varepsilon)=S_0$

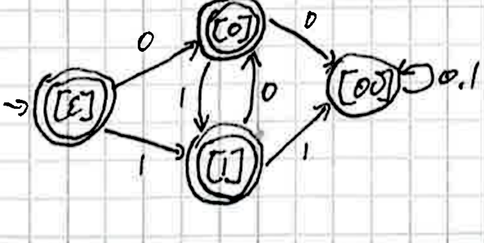
$[\varepsilon]=\{\varepsilon\}$

$[0]=\{0,10,\dots\}=0(10)^*\cup(10)^+$

$[1]=\{1,01,\dots\}=1(01)^*\cup(01)^+$

$[00]=\{00,11,\dots\}=(0\cup1)^*(00\cup11)(0\cup1)^*$

⇒ 4 Äquivalenzklassen



NP-Vollständigkeit ($L \in NP$ und L ist NP-Schwer) für alle $L' \in NP$ gilt $L' \propto L$

$4COLOR \in NP$

Einen Lösungsvorschlag können wir in $O(|E|)$ verifizieren, indem wir für jede Kante $\{u,v\}$ überprüfen, ob $c(u) \neq c(v)$

$3COLOR \propto 4COLOR$

Transformation: Sei $G=(V,E)$ eine 3COLOR Instanz. Erstelle dann eine 4COLOR Instanz $G'=(V',E')$ mit $V'=V \cup \{w\}$, $E'=E \cup \{\{w,u\} \mid u \in V\}$.
Die Transformation ist polynomiell.

$c'(u)=c(u), u \in V$ mit $c'(w)=3$

Äquivalenz
- Sei $G=(V,E)$ eine 3COLOR Instanz mit Lösung c. Dann ist ~~c mit c~~ eine Lösung für die 4COLOR Instanz G', da ~~per Konstruktion kein Knoten die gleiche Farbe wie w haben kann~~ nach Voraussetzung kein Nachbar von w die Farbe 3 haben kann
- Sei $G'=(V',E')$ eine 4COLOR Instanz mit Lösung c. Dann ist $c = c'|_V$ eine Lösung für die 3COLOR Instanz G, da per Konstruktion kein Knoten die gleiche Farbe wie w haben kann

Falls $L_1, L_2 \in NP$, $L_1 \propto L_2$ und L_1 NP-schwer, dann ist auch L_2-NP-Schwer.
"reduziere polynomiell von L_1 auf L_2."

Chomsky-NF
1. ersetze alle $a \in \Sigma$ in Regeln durch neue Variablen Y_a und füge $Y_a \to a$ hinzu
2. ersetze alle $A \to B_1 \cdots B_m$ mit $m \geq 2$ durch $A \to B_1C_1$, $C_i \to B_{i+1}C_{i+1}$, $C_{m-2} \to B_{m-1}B_m$ für $1 \leq i \leq m-2$
3. a) Finde die Menge V' aller Variablen A für die $A \xRightarrow{*} \varepsilon$ existiert
   b) Streiche alle Regeln $A \to \varepsilon$; Für $A \to BC$ füge ein $A \to B$ falls $C \in V'$, $A \to B$ falls $B \in V'$
4. a) Finde alle Kreise $A_1 \to A_2 \to \ldots \to A_n \to A_1$. Ersetze alle A_i durch A_1 (rechts und links)
   b) Für jede Regel $A \to B$ und jede Regel $B \to C$ füge Regel $A \to C$ hinzu, lösche Regel $A \to B$

Falls $S \xRightarrow{*} \varepsilon$ existierte, füge Startsymbol S' mit Regel $S' \to S \mid \varepsilon$ hinzu.

Approximationsalgorithmen	Minimierungsproblem	Maximierungsproblem
Absolute Approximation (additiver Fehler)	$A(I) \leq OPT(I) + K$	$A(I) \geq OPT(I) - K$
Relative Approximation (multiplikativer Fehler)	$A(I) \leq OPT(I) \cdot K$	$A(I) \geq \frac{OPT(I)}{K}$
relative Gütegarantie $R_A(I) =$	$\frac{A(I)}{OPT(I)}$	$\frac{OPT(I)}{A(I)}$

Minimierungsproblem $A(I) \leq X$, $OPT(I) \geq Y \Rightarrow A(I) \leq X = \frac{X \cdot Y}{Y} \leq \frac{X}{Y} \cdot OPT(I)$

Maximierungsproblem $A(I) \geq X$, $OPT(I) \leq Y \Rightarrow A(I) \geq X = \frac{X \cdot Y}{Y} \geq \frac{X}{Y} \cdot OPT(I)$

Approximationsschema PTAS hat A_ε polynomielle Laufzeit in $|I|$ $(O(n^{\frac{1}{\varepsilon}}))$
FPTAS hat A_ε polynomielle Laufzeit in $|I|$ und $\frac{1}{\varepsilon}$ $(O(\frac{1}{\varepsilon} \cdot n))$

Annahme: es existiert A' mit konstanter Güte $c \in \mathbb{N}$. Wir erhalten Instanz I', indem wir Instanz I $c+1$ mal kopieren. Beim Anwenden von A' auf I' erhalten wir Lösung Q^* mit Größe $\lfloor |A'(I')| / (c+1) \rfloor$ für eine Kopie.

Offensichtlich gilt $OPT(I') = (c+1) \cdot OPT(I)$. Dann gilt $|Q^*| = |A'(I')|/(c+1) \leq \frac{|OPT(I')| + c}{c+1} = |OPT(I)| + \frac{c}{c+1}$
Da $c/(c+1) < 1$ gilt und sowohl $|A'(I')|/(c+1)$ als auch $|OPT(I)|$ ganzzahlig ist, gilt $|Q^*| = |OPT(I)|$. Damit wäre Q^* aber eine optimale Lösung.
Da der modifizierte Algorithmus immer noch polynomielle Zeit benötigt, wäre das ein Widerspruch zu der Annahme $P \neq NP$.

TM akzeptiert L $\Leftrightarrow$ TM akzeptiert ausschließlich Wörter aus L

L entscheidbar $\Leftrightarrow$ TM akzeptiert L und hält immer

L semi-entscheidbar $\Leftrightarrow$ TM akzeptiert $w \in L$ sonst undefiniert