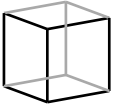


# 1 Darstellende Geometrie

## 1.1 Der Satz von Pohlke

Wie lautet der Satz von Pohlke und wie lässt er sich anwenden?

Jedes Dreieck, das eine Ebene aufspannt, ist Parallelprojektion eines gleichschenkligen orthogonalen Dreiecks im Raum.



Was sind Militar-, Kavalier- und Kabinett-Projektionen?

Militar	Kavalier	Kabinett

## 1.2 Orthogonale Projektionen

Was sind Orthogonal-, isometrische und dimetrische Projektionen?

**Orthogonalprojektion:** Parallelprojektion, bei denen die Projektionsstrahlen senkrecht zur Bildebene sind.

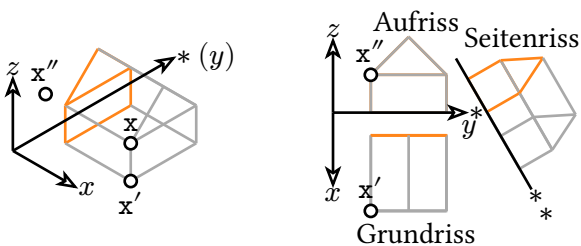
**isometrisch:** Orthogonalprojektion, bei der die Bildebene senkrecht zur Raumdiagonalen ist.

**dimetrisch:** wie isometrisch, aber die Tiefe ist nur 1/2

Wie erkennt man, dass die Parallelprojektion des Einheitswürfels eine Orthogonalprojektion ist?

## 1.3 Grund- und Aufriss

Was sind Grund- und Aufriss, Ordnung und Rissachsen?



\*, \*\*: Rissachsen  
Ordnung

Ein Punkt liege in einem durch Grund- und Aufriss bekannten Dreieck. Konstruieren Sie zum Aufriss des Punkts seinen Grundriss.

Ziehe Geraden je von Ecke durch Punkt bis gegenüberliegende Kante. Der Schnittpunkt teilt Kante in zwei Teilverhältnisse. Diese Teilverhältnisse in Grundriss übertragen und Gerade von Schnittpunkt zu Ecke ziehen. Schnittpunkt aller Geraden ist der Punkt im Grundriss.

## 1.4 +5 (Spezielle) Seitenrisse

Wie konstruiert man einen Seitenriss?

Man schaut von Modell in Richtung Rissachse.

Zeichnen Sie zum Grund- und Aufriss eines Würfels einen Seitenriss, der eine der Würfel-Diagonalen in wahrer Länge zeigt.

Erster Seitenriss 45deg. Dann zweiten Seitenriss 45deg zum ersten Seitenriss. Zeigt Raumdiagonale in wahrer Länge.

## 1.5 Kurven auf Flächen

Wie berechnet man die Tangentialebenen einer implizit gegebenen Fläche?

$\Delta F \cdot (y - x) = 0$  stellt die Tangentialebene von  $\mathcal{F}$  an der Stelle  $x$  dar. (Implizite Flächendarstellung  $F(x) = F(x, y, z) = 0$ )

Was ist die Kontur und was gilt für eine Kurve, die die Kontur schneidet im Grundriss?

Wo  $x(t)$  die Konturlinie kreuzt, berührt sie im Grundriss den Umriss. Bei parallelem Licht teilt die Konturlinie die helle und die dunkle Seite des Modells. Der Schatten = Silhouette hat einen Umriss.

## 1.6 Durchdringungen

Zeichnen Sie die Durchdringung von zwei Zylindern, deren Achsen, die sich im Allg. nicht schneiden, orthogonale Richtungen haben.

## 2 Affine Geometrie

### 2.1 Affine Raume und Koordinaten

#### Was sind ein affiner Raum, ein affines Koordinatensystem und affine Koordinaten?

Ein affiner Raum ist eine Punktmenge  $\mathcal{A}$  mit einem zugehörigen Vektorraum  $A$  und einer binären surjektiven Operation  $- : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow A, (p, q) \mapsto q - p$

Ein affines Koordinatensystem besteht aus einem Ursprung  $a \in \mathcal{A}$  und einer Basis  $a_1 \dots a_n \in A$ . Bezüglich solch eines affinen Koordinatensystems hat jeder Punkt  $x \in \mathcal{A}$  eine eindeutige Darstellung  $x = a + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ . Die Koeffizienten  $x_i$  heißen affine Koordinaten von  $x$  bezüglich des affinen Systems  $aa_1 \dots a_n$  und bilden den Koordinatenvektor  $[x_1 \dots x_n]^t$  des Punktes  $x$ .

### 2.2 Baryzentrische Koordinaten

#### Was sind baryzentrische Koordinaten, Grundecke, erweiterte Koordinaten?

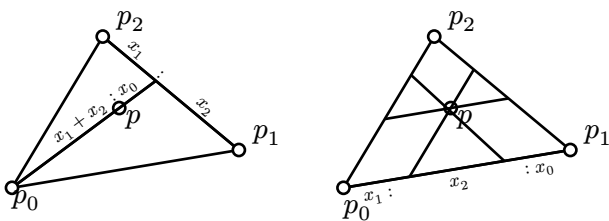
Zu einem Punkt  $p = p_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$  sind die Koeffizienten  $x_0, \dots, x_n$  die baryzentrischen Koordinaten bezüglich des Grundecks  $p_0 \dots p_n$ . Gleichzeitig erweitern sie die affinen Koordinaten, sodass sich die Summe zu Eins ergänzt.

$$\text{erweiterter Koordinatenvektor } \begin{bmatrix} 1 \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ p_0 & \dots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{baryzentrischer} \\ \text{Koordinatenvektor} \end{matrix}$$

#### Wie hängen baryzentrische und affine Koordinaten zusammen?

$$\begin{aligned} p &= \\ &= p_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \\ &= p_0(1 - x_1 - \dots - x_n) + (a + a_1)x_1 + \dots + (a + a_n)x_n \\ &= p_0 x_0 + \dots + p_n x_n \end{aligned}$$

#### Was bedeuten baryzentrische Koordinaten bezüglich eines Dreiecks geometrisch?



#### Wie erhält man die baryzentrischen Koordinaten des Höhenpunkts, des In- und Umkreismittelpunkts eines Dreiecks?

Umkreismittelpunkt:

$$m = \frac{a \sin(2\alpha) + \dots + c \sin(2\gamma)}{\sin(2\gamma) + \dots + \sin(2\gamma)}$$

Inkreismittelpunkt

$$n = \frac{aa + \dots + cc}{a + \dots + c}$$

Höhenpunkt

$$h = \frac{a \tan(\alpha) + \dots + c \tan(\gamma)}{\tan(\alpha) + \dots + \tan(\gamma)}$$

### 2.3 Affinkombinationen

#### Was sind Affin- und Konvex-kombinationen?

Eine Affinkombination ist eine Summe

$$\begin{aligned} p &:= \sum_{i=0}^m p_i \omega_i \\ &:= p_0 \omega + (p_1 - p_0) \omega_1 + \dots + (p_m - p_0) \omega_m \end{aligned}$$

$$\omega = \omega_0 + \dots + \omega_m = \begin{cases} 1 & \text{falls } p \text{ ein Punkt} \\ 0 & \text{falls } p \text{ ein Vektor} \end{cases}$$

Eine Affinkombinationen heißt Konvexkombination, falls

$$\omega = 1 \text{ und } \forall i : \omega_i \geq 0$$

#### Was sind konvexe Hüllen und Simplexe?

Die Menge aller Konvexkombinationen bildet die konvexe Hülle der Punktmenge  $\{p_0, \dots, p_m\}$ . Insbesondere heißt die konvexe Hülle eines Grundecks  $p_0 \dots p_n$  Simplex und speziell für  $n = 1$  Strecke, für  $n = 2$  Dreieck und für  $n = 3$  Tetraeder.

## 2.4 Unterraume

### Wie kann man affine Unterräume darstellen?

Die Lösung

$$n \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_r \end{bmatrix}}^r \begin{bmatrix} y \end{bmatrix}_r$$

eines inhomogenen linearen Gleichungssystems (LGS)

$$n-r \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \end{bmatrix}$$

vom Rang  $n-r$  stellt einen affinen Unterraum des  $\mathcal{A}^n$  der Dimension  $r$  dar. Der Parametervektor  $y$  stellt  $x$  bezüglich des Unterraum-Koordinatensystems  $bb_1 \dots b_r$  dar.

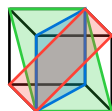
### Was ist eine Hyperebene und wie stellt man sie mit baryzentrischen Koordinaten dar?

Eine Hyperebene ist ein  $(n-1)$ -dimensionaler Untervektorraum des  $\mathcal{A}^n$ . Sie hat eine Darstellung der Form  $u(x) := u_1x_1 + \dots + u_nx_n + u_0 = 0$ . Aus dieser linearen Gleichung lässt sich leicht eine Darstellung in baryzentrischen Koordinaten bezüglich der Punkte mit den erweiterten Koordinatenvektoren  $[110\dots 0]^t, [1010\dots 0]^t, \dots, [10\dots 01]^t$  gewinnen. Sei  $1 = x_0 + \dots + x_n$ . Dann ist

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0(x_0 + \dots + x_n) + u_1x_1 + \dots + u_nx_n \\ &= u_0x_0 + (u_0 + u_1)x_1 + \dots + (u_0 + u_n)x_n \\ &= 0 \end{aligned}$$

### Wie kann ein Würfel in 6 Simplexe gleichen Volumens zerlegt werden?

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq y \leq z \leq 1 \\ 0 &\leq x \leq z \leq y \leq 1 \\ 0 &\leq y \leq x \leq z \leq 1 \\ 0 &\leq y \leq z \leq x \leq 1 \\ 0 &\leq z \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 &\leq z \leq y \leq x \leq 1 \end{aligned}$$



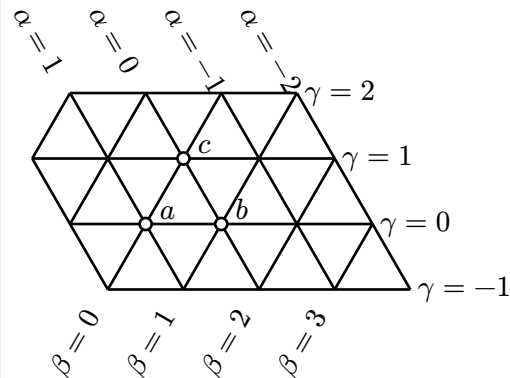
Einfache Freudenthal-Triangulierung

## 2.5 Gitter

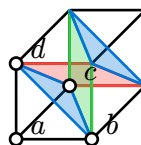
### Was kann ein regelmäßiges Dreiecksgitter in baryzentrischen Koordinaten beschrieben werden?

$$x = a\alpha + b\beta + c\gamma \text{ mit } 1 = \alpha + \beta + \gamma$$

Die Isolinien  $\alpha = i, \beta = j, \gamma = k$  für  $i, j, k \in \mathbb{Z}$  beschreiben ein regelmäßiges Gitter.



### Was ist die Coxeter-Freudenthal-Kuhn-Triangulierung?



Der Würfel links ist in sechs Tetraeder zerlegt. Unterteilt man alle Würfel eines raumfüllenden regelmäßigen Würfelgitters parallel zu der links gezeigten Unterteilung, erhält man die Coxeter-Freudenthal-Kuhn-Triangulierung des Raums.

## 2.6 Affine Abbildungen

### Was ist eine affine Abbildung und die ihr zugeordnete lineare Abbildung?

Eine Abbildung  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  zwischen affinen Räumen heißt affin, wenn sie alle Affinkombinationen invariant lässt, d.h. wenn sie mit Affinkombinationen vertauschbar ist:  $\Phi(\sum p_i x_i) = \sum (\Phi p_i) x_i$

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= Qx := q_0x_0 + \dots + q_nx_n \\ &= q_0 + (q_1 - q_0)x_1 + \dots + (q_n - q_0)x_n \\ &=: b + Bx \end{aligned}$$

Die Abbildung  $\varphi(v) = Bv$  ist die  $\Phi$  zugeordnete lineare Abbildung  $A \rightarrow B$  für  $v = y - x, \Phi(y) - \Phi(x) = Bv$

### Wie lassen sich beide mit baryzentrischen Koordinaten und Matrizen beschreiben?

Der Vektor  $v$  hat den baryzentrischen Koordinatenvektor  $v = y - x$ . Somit haben die affine Abbildung  $\Phi$  und die zugeordnete lineare Abbildung  $\varphi$  bezüglich baryzentrischen Koordinaten die gleiche Matrixdarstellung:

$$\Phi(x) = Qx = [q_0 \dots q_n]x$$

$$\varphi(v) = Qv = [q_0 \dots q_n]v$$

## 2.7 Parallelität und Teilverhältnisse

### Wie sind Parallelität und Teilverhältnisse definiert?

Zwei affine Unterräume  $\mathcal{U} = p + U$  und  $\mathcal{V} = q + V$  der  $\mathcal{A}^n$  heißen parallel, falls  $U \subset V$  oder  $V \subset U$ . Die linearen Räume  $U$  und  $V$  heißen auch Richtungen der affinen Unterräume.

Zwei Strecken  $ab$  und  $cd \subset \mathcal{A}^n$  heißen parallel, wenn gilt

$$d - c = (b - a)\rho, \rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Sind Strecken parallel, schreiben wir auch

$$\frac{d - c}{b - a} := \rho$$

wobei der Faktor  $\rho$  das Teilverhältnis der beiden Strecken ist.

## 2.8 Verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten

### Was sind verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten und wie lassen sie sich alle darstellen?

Sei  $p_1 \dots p_n$  ein nicht-degeneriertes Polygon  $\mathcal{P}$  im  $\mathcal{A}^2$ .

$$p = \sum p_i v_i \text{ und } 1 = \sum v_i$$

heißt die  $v_i$  verallgemeinerte baryzentrische Koordinaten von  $p$  bezüglich  $\mathcal{P}$ . Sie bilden einen verallgemeinerten baryzentrischen Koordinatenvektor  $v = [v_1 \dots v_n]^t$ .

## 2.9 Wachspresskoordinaten

### Was sind die Wachspresskoordinaten und welche Eigenschaften haben sie?

$$a_i := \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & p_i & p_{i+1} \end{bmatrix} \text{ und } d_i := \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_{i-2} & p_i & p_{i+1} \end{bmatrix}$$

$$\text{Wachspresskoordinaten } \omega_i := \frac{\lambda_i}{\sum_j \lambda_j} \text{ wobei } \lambda_j = \frac{d_j}{a_i a_{i-1}}$$

Die Wachspresskoordinaten kann man als Affinkombinationen der  $b_i$  darstellen.

Bemerkenswerterweise gilt für der

Wachspresskoordinatenvektoren  $w = [\omega_1 \dots \omega_n]^t$ , dass  $[b_1 \dots b_n]w = w$ . Somit ist  $w$  ein Eigenvektor der Matrix  $B = [b_1 \dots b_n]$  zum Eigenwert 1.

## 2.10 Mittelwertkoordinaten

### Was sind die Mittelwertkoordinaten und wo sind sie alle positiv?

Für das Polygon  $pp_1 \dots p_n$  sind die

Mittelwertkoordinaten  $\mu_i$  eines Punkts  $p$  so definiert:

$$\mu_i := \frac{\tau_i}{\sum_j \tau_j}, \text{ wobei } \tau_i := \frac{1}{c_i} (\tan \delta_{i-1} + \tan \delta_i)$$

Der Kern eines Polygons besteht aus allen Punkten im Inneren, von denen aus der gesamte Polygonrand gesehen werden kann, wenn der Polygonrand als undurchsichtig angesehen wird. Die Mittelwertkoordinaten der Punkte im Kern sind alle positiv.

## 3 Euklidische Geometrie

### Was ist ein euklidischer Raum und was unterscheidet ihn von einem affinen?

Ein euklidischer Vektorraum ist ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt und ein euklidischer Raum ist ein affiner Raum, dessen zugeordneter Vektorraum euklidisch ist.

$\mathcal{E}^n$  bezeichnet den euklidischen  $\mathcal{A}^n$  und der Abstand zweier Punkte  $p$  und  $q$  ist die Länge des Vektors  $q - p$  als auch die Länge der Strecke  $pq$ .

### 3.1 Euklidische Bewegungen

#### Was gilt für ihre Matrizen?

Ein affines Koordinatensystem  $a a_1 \dots a_n$  ist ein euklidisches Koordinatensystem, wenn die Vektoren  $a_1, \dots, a_n$  eine orthonormale Basis bilden.

Stellen  $u, v$  zwei Vektoren bezüglich einer orthonormalen Basis dar, ist  $u^t v$  ihr Skalarprodukt und allgemeiner lässt sich jedes Skalarprodukt mit Hilfe einer symmetrischen, positiv definiten Matrix  $A$  als  $u^t A v$  schreiben. Hier setzen wir für den  $\mathcal{E}^n$  immer ein euklidisches Koordinatensystem voraus.

#### Wie kann man die Drehachse einer Rotation im dreidimensionalen Raum bestimmen?

Eigenvektor der Matrix  $[b_1, b_2, b_3]$

Eine affine Abbildung  $\Phi(x) = b + Bx$  ist eine Bewegung, wenn  $B$  orthonormal ist.

### 3.2 Euler-Winkel

#### Was sind die Euler-Winkel und wie verwendet man sie?

Jede Rotation im  $\mathcal{E}^3$  kann aus einer Rotation um die z-Achse mit dem Winkel  $\alpha$ , eine Rotation um die gedrehte x-Achse (=  $x'$ -Achse) mit dem Winkel  $\beta$  und eine Rotation um die zweimal gedrehte z-Achse mit dem Winkel  $\gamma$  zusammengesetzt werden. Diese Rotation sind die Euler-Drehungen um die Euler-Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$ .

**TODO: verwendung**

### 3.3 Quaternionen

#### Was sind Quaternionen, konjugierte und normierte?

Quaternionen oder hyperkomplexe Zahlen sind Elemente

$$q = (q_0, \dots, q_3) = q_0 \cdot 1 + q_1 \cdot i + q_2 \cdot j + q_3 \cdot k$$

des  $\mathbb{R}^4$  mit den Multiplikationsregeln

$\cdot$	1	$i$	$j$	$k$
1	1	$i$	$j$	$k$
$i$	$i$	-1	$k$	$-j$
$j$	$j$	$-k$	-1	$i$
$k$	$k$	$j$	$-i$	-1

d.h. für ein Quaternionenprodukt

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (a_0, \dots, a_3) \cdot (b_0, \dots, b_3) \\ &= (a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3) \\ &\quad + (a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 - a_3 b_2) \cdot i \\ &\quad + (a_0 b_2 - a_1 b_3 + a_2 b_0 + a_3 b_1) \cdot j \\ &\quad + (a_0 b_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_3 b_0) \cdot k \end{aligned}$$

und insbesondere  $\mathbb{1} := (1, 0, 0, 0)$  und alle  $q$  ist

$$\mathbb{1} \cdot q = q \cdot \mathbb{1}$$

Das konjugierte Quaternion zu  $q$  ist

$$q^* = (q_0, -q_1, -q_2, -q_3)$$

Es heißt Einheitsquaternion oder normiertes Quaternion, falls

$$\|q\|^2 = \|q^*\|^2 := \sum q_i^2 = 1$$

#### Wie hängen sie mit Rotationen zusammen?

Sei  $r = (\cos \frac{\varphi}{2}, a^t, \sin \frac{\varphi}{2})$  ein normiertes Quaternion, d.h.  $a^2 = 1$ . Dann gilt

$$r \cdot (0x^t) \cdot r^* = \left( \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} \right)^t$$

$r = (1, 0, 0, 0)$  stellt die Identität dar

$r^*$  die inverse Rotation

$p r$  die Komposition der durch  $p$  und  $r$  gegebene Rotation

**Was lässt sich mit Quaternionen, EulerWinkeln und Drehmatrizen jeweils besser gut darstellen oder durchführen?**

**Euler-Winkel:** interpolation, anwendung auf pkt  
**Matirx:** anwendung auf pkt  
**Quaternion:** Konkatenation, Normierung, Interpolation

### 3.4 Zweibögen

**Was sind Zweibogen und Kontaktelemente?**

Ein Zweibogen (Biarc) ist eine glatte Kurve bestehend aus zwei orientierten Kreisbögen. Dabei dürfen Radien unendlich sein, d.h. Kreisbögen können Strecken sein.

Ein Punkt  $p$  einer Kurve bildet zusammen mit dem zugehörigen Tangentenvektor  $t, \|t\| = 1$ , ein Kontaktelement der Kurve.

**Wodurch ist ein Zweibogen eindeutig festgelegt?**

Zu zwei gegebenen Punkten  $a$  und  $b$  und einem Kontaktelement  $ct$  gibt es genau einen Zweibogen von  $a$  nach  $b$  mit der Tangentenrichtung  $t$  um Übergangspunkt  $c$  zwischen den beiden Bögen.

**Was erfüllen die drei Endkontaktelemente der beiden Bogen eines Zweibogens?**

**Wie bekommt man alle Zweibogen zu gegebenen Anfangs- und Endkontaktelement?**

Im  $\mathcal{E}^2$  seien  $au$  und  $cw$  zwei beliebige Kontaktelemente mit den Tangenten  $\mathcal{A} := a + u\mathbb{R}$  und  $\mathcal{C} := cw\mathbb{R}$ . Dann existiert ein eindeutiger Kreis  $K$  durch  $a$  und  $b$  sodass

$$\varphi := \angle \mathcal{A} \mathcal{K} = \angle \mathcal{C} \mathcal{K}$$

Dieser Kreis  $\mathcal{K}$  ist der Ort  $\mathcal{B}$  (d.h. die Menge) Übergangs- oder Bindepunkte aller Zweibögen mit den Endkontaktelementen  $au$  und  $cw$ .

**Wie übertragen sich planare Zweibogenkonstruktionen auf sphärische?**

Die Sätze gelten genauso auch auf der Sphäre  $S^2$  anstelle des  $\mathcal{E}^2$ . Echte Zweibögen auf  $S^2$  sind räumlich: Ihre Bögen liegen in verschiedenen Ebenen. Außerdem liegt jeder räumliche Zweibogen auf einer (eindeutigen) Sphäre.

### 3.5 Volumen

**Wie ist das Volumen eines Parallelepipeds definiert?**

Jedes  $k$ -dimensionale Parallelepiped

$$P_k := p + A_k [0, 1]^k$$

hat die Höhe  $\gamma_{kk}$  über  $P_{k-1}$  und das Volumen

$$\begin{aligned} \text{vol}_k P_k &:= \gamma_{11} \dots \gamma_{kk} \\ &= \sqrt{\det(\Gamma_k^t B_k^t B_k \Gamma_k)} \\ &= \sqrt{\det(A_k^t A_k)} \end{aligned}$$

**Warum lassen euklidische Bewegungen Volumina invariant?**

Euklidische Bewegungen lassen Volumina invariant. Affinitäten

$$\Phi(x) = c + Cx : \mathcal{E}^n \rightarrow \mathcal{E}^n$$

ändern das  $n$ -dimensionale Volumina um den Faktor  $|\det C|$  und lassen Verhältnisse  $n$ -dimensionaler Volumina invariant. (Weil  $C$  orthonormal/eine Drehung und keine Skalierung ist?)

### 3.6 Alternierendes Produkt

**Wie ist das alternierende Produkt definiert und welche Eigenschaften hat es?**

Die Determinante einer  $n \times n$ -Matrix  $A = [a_1 \dots a_n]$  kann mit Hilfe ihrer Kofaktoren  $v_i = (-1)^{i+1} \det A_{i1}$  berechnet werden, wobei  $A_{i1}$  die Matrix  $A$  ohne ihre  $i$ -te Zeile und erste Spalte ist; denn mit dem Vektor  $\mathbb{b} = [v_1 \dots v_n]$  der Kofaktoren gilt  $\det A = a_1^t v$ .

Das alternierende Produkt der Vektoren  $a_2, \dots, a_n$  ist der Vektor  $a_2 \wedge \dots \wedge a_n := v$ .

- $a_i^t v = 0$  für  $i = 2, \dots, n$
- $\text{vol}_n A = \text{vol}_{n-1}[a_2 \dots a_n] \cdot \frac{|a_1^t|}{\|v\|} \Rightarrow \|v\| = \text{vol}_{n-1}[a_2 \dots a_n]$
- $\det[v a_2 \dots a_n] = v^2 \geq 0$ , d.h. die Folge  $v a_2 \dots a_n$  ist positiv orientiert.

$$\text{Für } n = 2: \wedge \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix}$$

$$\text{Für } n = 3: \text{Kreuzprodukt } a_2 \wedge a_3 = a_2 \times a_3$$

### 3.7 Lot und Abstand

Wie lassen sich die Abstände eines Punkts von einer Ebene und die zweier Geraden berechnen?

Gesucht: Fußpunkt  $f$  und Abstand  $d$

Punkt  $p$  zu Ebene  $\mathcal{U} : d(x) = u^t x - u = 0$ , sodass  $f = p - du$ :

$$\begin{aligned} u^t f &= u^t p - d = u \\ \Rightarrow d &= u^t p - u \\ &= d(p) \end{aligned}$$

Punkt  $p$  zu Ebene  $\mathcal{U} : x = a + [a_2 \dots a_n]y =: a + Ay$ , sodass  $f = p - du$ :

$$\begin{aligned} d &= \frac{\det[(p-a) \ A]}{\text{vol}_{n-1} A} = \frac{\det[(p-a) \ A]}{\|a_2 \wedge \dots \wedge a_n\|} \\ f &= p - \frac{a_2 \wedge \dots \wedge a_n}{\|a_2 \wedge \dots \wedge a_n\|} d \end{aligned}$$

Gerade  $\mathcal{A} : x = a + a_1 \lambda$  zu Gerade  $\mathcal{B} : x = b + b_1 \lambda$ :

$$d = \frac{\text{vol}_3[(b-a) \ a_1 \ b_1]}{\text{vol}_2[a_1 \ b_1]}$$

Der Fußpunkt liegt in der Ebene  $\mathcal{E} : u^t(x - a) = 0$

$$\dots \Rightarrow f = b + b_1 \frac{u^t(a - b)}{u^t b_1}$$

## 4 Perspektivische Darstellungen

### 4.1 Homogene Koordinaten

Was sind homogene Koordinaten, Fernpunkte und der Unpunkt?

Ein Punkt  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{A}^n$  hat die homogenen Koordinatenvektoren  $x = \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} \xi, \xi \neq 0$ , die die Vielfachen des erweiterten Koordinatenvektors von  $x$  sind.

Die Mengen der Vielfachen eines Vektors  $v$  ohne den Nullvektor  $o$  werden als ein (einziger) Fern- oder uneigentlicher Punkt mit den homogenen Koordinatenvektoren  $v = \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} \varphi, \varphi \neq 0$  betrachtet. Jedoch zählt der Unpunkt  $o = \begin{bmatrix} 0 \\ o \end{bmatrix} \varphi, \varphi \neq 0$  nicht zu den Fernpunkten.

Vielfache eines homogenen Koordinatenvektors  $x$  stellen denselben Punkt  $x$  dar. Wir bezeichnen dies mit  $x \sim y : \Leftrightarrow x = y\varphi, \varphi \neq 0$ , und  $x \triangleleft x$

Geben Sie die Gleichungsdarstellung einer Hyperebene in erweiterten Koordinaten an und leiten Sie daraus die homogene Darstellung ab!

Eine Hyperebene  $\mathcal{H} : u^t x + u_0 = [u_0 \ u^t] \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} = 0$  hat die homogene Darstellung  $u^t x = 0$ .

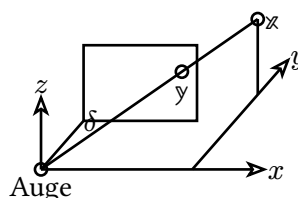
Was ist die Fernhyperebene?

Die projektive Hyperebene  $\mathcal{F} : [10\dots 0]x = 0$  besteht aus den Fernpunkten des  $\mathcal{A}^n$ . Sie heißt Fern(hyper)ebene oder im  $\mathcal{A}^2$  auch Ferngerade.

### 4.2 Zentralprojektion

Was ist eine Zentralprojektion?

Bei einer Zentralprojektion sind nicht parallel, sondern gehen alle durch ein Zentrum  $a$ , das auch Auge genannt wird.



Wir wählen das Koordinatensystem so, dass der Ursprung im Projektionszentrum, dem Auge  $a$  liegt und die Bildebene parallel zur  $xz$ -Ebene ist. Das Koordinatensystem der Bildebene sei

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \delta \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dann hat  $x = [xyz]^t$  das Bild

$$y := \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \frac{\delta}{y}$$

Wie kann sie mit Matrizen beschrieben werden?

In homogenen Koordinaten sieht dies so aus:

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ \xi \\ \eta \end{bmatrix} \omega = \begin{bmatrix} y \\ x\delta \\ z\delta \end{bmatrix} \varphi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \delta \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \varphi = P x$$

Was ist die Fokaldistanz und was ist der Hauptpunkt?

Die Fokaldistanz  $\delta$  ist der Abstand der Bildebene zur Kamera und kontrolliert die Bildgröße.

Der Punkt  $h$  der Bildebene, wo der Projektionsstrahl/ das Auge senkrecht zur Bildebene ist, heißt Hauptpunkt.

### 4.3 Kamerabewegung

**Wie stellt sich eine Zentralprojektion in Matrizen dar, wenn das Objekt- und Kamerasystem verschieden sind?**

**TODO: Bild**

Im Allgemeinen ist das Kamerasystem mit dem Koordinatenvektoren  $\bar{x} = [\xi\delta\eta]^t$  des Objektsystems bezogen, sondern über eine allgemeine Koordinatentransformation  $x = c + [c_1 c_2 c_3]\bar{x}$ , wobei sich die  $c$ 's wie  $x$  auf das Objektsystem beziehen. Wir fassen die Koordinatentransformation mit Matrizen als  $x = c + C\bar{x}$  oder kürzer als  $x = \begin{bmatrix} 1 & o^t \\ c & C \end{bmatrix} \bar{x} = \mathbb{C}\bar{x}$  zusammen. Das zentralperspektivische Bild von  $x$  hat somit die homogene Darstellung  $y = \mathbb{T}\mathbb{P}\mathbb{C}^{-1}x = \mathbb{A}$ , wobei  $\mathbb{T}$  zusätzlich eine Translation des Bildsystems beschreibt.

Weil  $C$  orthonormal ist, folgt  $\mathbb{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & o^t \\ -C^t c & C^t \end{bmatrix}$ .

### 4.4 Fluchtpunkte

**Was versteht man unter Fluchtpunkten, der Spur, Horizont, Verschwindungsebene und Fluchtdreieck?**

Eine Gerade

$$\mathcal{G} : x = p + v\lambda = \begin{bmatrix} 1 \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} \lambda = \mathbb{p} + v\lambda$$

wird auf die Gerade  $\mathcal{G}' : \mathbb{A}\mathbb{p} + \mathbb{A}v\lambda$  abgebildet, wobei  $\mathbb{A}$  die Abbildungsmatrix ist. Dabei stellt  $\mathbb{A}v$  das Bild des Fernpunkts  $f_{\mathcal{G}}$  von  $\mathcal{G}$  dar. Es ist der Fluchtpunkt von  $\mathcal{G}$  bzw. von  $\mathcal{G}'$ .

Die Fluchtpunkte (der Geraden) einer Ebene  $\mathcal{E}$  bilden deren Fluchtgeraden oder, wenn  $\mathcal{E}$  horizontal ist, deren Horizont.

Der Schnitt einer Ebene  $\mathcal{E}$  mit der Bildebene heißt die Spur von  $\mathcal{E}$ . Sie ist parallel zu Fluchtgeraden von  $\mathcal{E}$ .

Die Ebene  $\mathcal{V}$  parallel zur Bildebene durch das Auge heißt Verschwindungsebene. Sie wird auf die Ferngerade der Bildebene abgebildet, aber das Auge hat kein Bild.

**Wann sind Fluchtpunkte Fernpunkte?**

Ist  $\mathcal{G}$  parallel zur Bildebene, ist ihr Fluchtpunkt ein Fernpunkt der Bildebene.

**Wo schneiden sich Spur und Fluchtgeraden einer Ebene?**

### 4.5 Der Hauptsatz

**Erklären Sie, was die Spalten und Elemente der Matrix einer Zentralperspektive bedeuten!**

Eine Zentralperspektive hat die Darstellung  $y = \mathbb{A}x$  und ausführlicher

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ y \end{bmatrix} \rho = \begin{bmatrix} 1\alpha & \varepsilon_1\alpha_1 & \varepsilon_2\alpha_2 & \varepsilon_3\alpha_3 \\ a\alpha & a_1\alpha_1 & a_2\alpha_2 & a_3\alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ x \end{bmatrix}$$

wobei  $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, e \in \{0, 1\}$  und  $\alpha_i \neq 0 \neq \alpha$ . Dabei wird vorausgesetzt, dass  $[1, o]^t$  nicht in der Verschwindungsebene liegt.

Die Spalten von  $\mathbb{A}$  repräsentieren das Bild des Objektsystems,  $a$  das Bild des Ursprungs  $[1, o]^t$  und  $[\varepsilon_i, a_i]^t$  den Fluchtpunkt  $f_i$  der  $i$ -Achse.

### 4.6 Kameradaten

**Wie erhält man die Verschwindungsebene, den Hauptrichtungsvektor, den Hauptpunkt und die Fokaldistanz aus der Matrix einer Zentralperspektive?**

Die Verschwindungsebene hat die Gleichung

$$\begin{aligned} \varepsilon\rho &= \varepsilon_1\alpha_1x + \varepsilon_2\alpha_2y + \varepsilon_3\alpha_3z + \alpha e \\ &= [\alpha\varepsilon_1\alpha_1, \varepsilon_2\alpha_2, \varepsilon_3\alpha_3] \begin{bmatrix} e \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

und den nicht normierten Normalenvektor

$n := [\varepsilon_1\alpha_1, \varepsilon_2\alpha_2, \varepsilon_3\alpha_3]$ . Seine Vielfachen  $n\rho$  mit  $\rho \neq 0$  sind die Hauptrichtungsvektoren. Das Auge  $c$  wird durch den Lösung von  $\mathbb{A}c = o$  repräsentiert und der Hauptpunkt durch  $h = \mathbb{A} \begin{bmatrix} 0 \\ n \end{bmatrix}$ , woraus  $h = \sum a_i\lambda_i$  mit  $\lambda_i = \frac{\varepsilon_i\alpha_i^2}{n^t n}$  folgt.

Die Fokaldistanz  $\delta$  lässt sich aus dem Hauptrichtungsvektor  $n$  und einem Vektor  $v$  im Winkel von  $45^\circ$  zu  $n$  ermitteln, da sie dem Abstand von  $f \triangleleft \mathbb{A}v$  zu  $h$  entspricht.

### Warum ist der Hauptpunkt der Höhenpunkt des Fluchtdreiecks?

Jede  $(3 \times 4)$ -Matrix  $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ a & a_1\alpha_1 & a_2\alpha_2 & a_3\alpha_3 \end{bmatrix}$  vom Rang 3 repräsentiert eine 3-Punkt-Perspektive genau dann, wenn  $h = \sum a_i \frac{a_i^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$  der Höhenpunkt des Dreiecks  $a_1 a_2 a_3$  ist.

Diese Bedingung ergibt sich aus Abschnitt 4.6 und sie beinhaltet zwei Bedingungen, nämlich je eine für beide Koordinaten von  $h$ . Im Übrigen ist das Fluchtdreieck einer 3-Punkt-Perspektive immer spitzwinklig, da alle  $\alpha_i > 0$ , weswegen der Hauptpunkt im Dreiecksinneren liegt.

## 4.7 Fluchtpunkte des Systems

### Was ist eine i-Punkt-Perspektive und wie kann man erkennen, ob und welche i-Punkt-Perspektive eine Matrix darstellt?

Die Matrix  $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \varepsilon_0\alpha & \varepsilon_1\alpha_1 & \varepsilon_2\alpha_2 & \varepsilon_3\alpha_3 \\ a\alpha & a_1\alpha_1 & a_2\alpha_2 & a_3\alpha_3 \end{bmatrix}$  (vom Rang 3), repräsentiert eine i-Punkt-Perspektive, wobei  $i = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_3$ .

0-Punkt:  $\varepsilon_i = 0$

1-Punkt:  $\varepsilon_2 = 1, \|a_1\| = \|a_3\|, a_1 \perp a_3$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1, a_3 \perp a_2 - a_1, \|a_3\| \sqrt{a_1^2 + a_2^2} =$$

2-Punkt:  $|\alpha_1\alpha_2| \|a_2 - a_1\|$

3-Punkt:  $\varepsilon_{\{1,2,3\}} = 1, h = \sum a_i \frac{a_i^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$  der Höhenpunkt des Dreiecks  $a_1 a_2 a_3$  ist.

## 4.8 Urbilder

### Wie berechnet man das Urbild eines Punkts und einer Geraden unter einer Zentralperspektive?

Möchten wir bei bekannter Matrix  $\mathbb{A}$  einer Zentralprojektion zu einem gegebenen Bildpunkt  $y$  den Urbildpunkt  $x$  bestimmen, haben wir diese drei Gleichungen für vier Unbekannte zu lösen:

$$\mathbb{A} \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} \omega = \begin{bmatrix} 1 \\ y \end{bmatrix}.$$

Eine Gerade  $\mathcal{V} : v^t y = 0$  der Bildebene hat die Ebene  $\mathcal{U} : v^t \mathbb{A} \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} \xi = v^t \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} \xi = 0$  als Urbild und, wenn wir  $\xi$  jeweils streichen, erhalten wir über zwei Geraden durch  $y$  zwei Gleichungen für die rdei Koordinaten des gesuchten Punkts  $x$ . Weitere Geraden durch  $y$  sind von den ersten beiden abhängig und führen nur zu abhängigen Gleichungen.

## 4.9 Kamerakalibrierung

### Wie kann man die Matrix bestimmen, die zu einem zentralperspektivischen Bild gehört?

Die Gleichung  $v^t \mathbb{A} = \sum v_i a_{ij} x_j = 0$  ist linear in den 12 Matrixelementen  $a_{ij}$ . Kennt man sechs Punkte  $x$  und ihre Bilder  $y$ , kann man  $\mathbb{A}$  folglich daraus berechnen.

Da  $\mathbb{A}$  homogen ist und zwei Bedingungen genügt, reichen zur Bestimmung von  $\mathbb{A}$  sogar nur 4,5 Punkte, d.h. vier Punkte mit je zwei Geraden und ein Punkt mit einer Geraden. Mehr zu kennen hilft aber numerische Fehler entgegenzuwirken. Man bekommt dann überbestimmte Gleichungssysteme, die mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate gelöst werden.

### Wie viele Freiheitsgrade hat man für diese Matrizen und was sind ihre Dimensionen?

## 5 Projektive Geometrie

### 5.1 Projektive Räume

#### Was ist ein projektiver Raum?

Die eigentlichen und uneigentlichen Punkte des  $\mathcal{A}^n$  bilden den projektiven Raum  $\mathcal{P}^n$  bzw die projektive Erweiterung des  $\mathcal{A}^n$ .

#### Was sind die projektiven Unterräume?

Der  $\mathcal{P}^n$  wird durch die Menge der eindimensionalen Unterräume des  $\mathbb{R}^{n+1}$  repräsentiert und die projektiven Unterräume von  $\mathcal{P}^n$  durch die linearen Unterräume des  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Die eindimensionalen Unterräume des  $\mathbb{R}^{n+1}$  stellen die Punkte des  $\mathcal{P}^n$  dar.

Stellt ein Unterraum  $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$  den Unterraum  $U \subset \mathcal{P}^n$  dar, gilt  $\dim \mathcal{U} := \dim U - 1$ . Ein Unterraum  $\mathcal{U}$  der Dimension  $-1, 0, 1, 2, n - 1$  ist leer oder wird Punkt, eine Gerade, eine Ebene bzw. eine Hyperebene genannt.

Der Schnitt zweier projektiven Unterräume  $\mathcal{U}$  und  $\mathcal{V}$  ist der projektive Unterraum  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} := \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$  und ihre Verbindung  $\mathcal{U} \sqcup \mathcal{V}$  der kleinste projektive Unterraum, der  $\mathcal{U}$  und  $\mathcal{V}$  enthält.

#### Warum schneiden sich zwei Geraden einer projektiven Ebene immer?

(Alle Hyperebenen gehen durch den Ursprung des  $\mathcal{A}^n$ )

## 5.2 Projektive Koordinaten

### Wann heißt eine Punktfolge projektiv unabhängig?

Die Folge  $p_0 \dots p_r$  heißt projektiv unabhängig genau dann, wenn die Folge  $p_0 \dots p_r \subset \mathbb{R}^{(n+1)}$  linear unabhängig ist.

### Wie ist die projektive Hülle von Punkten definiert?

Die projektive Hülle oder der Aufspann von  $p_0 \dots p_r$  ist der projektive Unterraum

$$\langle p_0 \dots p_r \rangle := \{x \mid x \in [p_0 \dots p_r] \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\}.$$

### Wie sind projektive Koordinaten definiert?

Wir bemerken, dass jedes projektive Grunddeck im  $\mathcal{P}^n$  eindeutig ein Koordinatensystem im  $\mathbb{R}^{n+1}$  bestimmt. Für die Angabe von Koordinaten im  $\mathcal{P}^{n+1}$  reicht es, nur ein Grunddeck im  $\mathcal{P}^n$  anzugeben, sodass wir uns ganz vom  $\mathbb{R}^{n+1}$  lösen können. Wir nennen die Koordinaten eines Punktes deshalb auch projektive Koordinaten bezüglich eines Grunddecks. Sind  $x_i$  die projektiven Koordinaten eines Punktes  $x$  bezüglich  $p_0 \dots p_n p$  schreiben wir auch  $x = p_0 x_0 + \dots + p_n x_n$ .

### Was ist eine projektive Skala?

Seien  $x_0$  und  $x_1$  die projektiven Koordinaten eines Punktes  $x$  bezüglich eines Grunddecks  $p_0 p_1 p$ . Dann bilden die Quotienten  $x = \frac{x_1}{x_0}$  für alle  $x \in p_0 \sqcup p_1$  die projektive Skala bezüglich  $p_0 p_1 p$ .

### Wann ist eine projektive Skala eine affine?

Ist  $p_0 p_1 p$  ein projektives Grunddeck in einer projektiv erweiterten affinen Gerade mit Fernpunkt  $p_1$ , ist die projektive Skala  $x$  bezüglich  $p_0 p_1 p$  auch eine affine Skala, die den affinen Koordinaten der Punkte  $x$  bezüglich des affinen Koordinatensystems  $p_0(p - p_0)$  entspricht.

## 5.3 Koordinatentransformation

### Wie können projektive Koordinaten in projektive Koordinaten bezüglich eines anderen Grunddecks transformiert werden?

Seien  $p_0 \dots p_n p$  und  $q_0 \dots q_n q$  Grunddecke des  $\mathcal{P}^n$  und sei

$$p = [p_0 \dots p_n]e = Pe$$

$$q = [q_0 \dots q_n]e = Qe$$

$$x = P x_p = Q x_q$$

Dann ist  $x_q = Q^{-1} P x_p$  eine

Koordinatentransformation. Dabei repräsentiert  $Q^{-1} P$  die Grundpunkte  $p_i$  bezüglich des Grunddecks  $q_0 \dots q_n q$ .

### Wie ändern sich bei einer Koordinatentransformation die Koordinaten von Hyperebenen?

Eine Hyperebene  $\mathcal{U} : u^t x = 0$  hat bezüglich des Grunddecks  $q_0 \dots q_n q$  die Darstellung  $u^t Q x_q =: u_q^t x_q = 0$ . Also ist  $u_q = Q^t u$  die Transformation des homogenen Hyperebenen-Koordinatenvektors  $u$  in den bezüglich des Grunddecks  $q_0 \dots q_n q$ .

### Warum kann jede Hyperebene eines projektiven Raums als Fernhyperebene aufgefasst werden?

Die Grundpunkte  $q_1, \dots, q_n$  liegen in der Hyperebene  $\mathcal{U}$  genau dann, wenn  $u_q^t \sim [10 \dots 0]$ . D.h. bezüglich des Grunddecks  $q_0 \dots q_n q$  kann  $\mathcal{U}$  als die Fernhyperebene einer projektiven Erweiterung des  $\mathcal{A}^n$  aufgefasst werden. Da  $\mathcal{U}$  eine beliebige Hyperebene ist, kann auch jede andere Hyperebene als Fernhyperebene aufgefasst werden.

## 5.4 Der Dualraum

### Was ist der Dualraum eines projektiven Raums?

Die Hyperebenen des  $\mathcal{P} := \mathcal{P}^n$  bilden einen projektiven Raum, der Dualraum von  $\mathcal{P}^n$  genannt und mit  $\mathcal{P}^*$  bezeichnet wird.

### Was heißt alles dual zueinander?

Ein Punkt  $u$  und eine Hyperebene  $\mathcal{U}$  mit dem gleichen homogenen Koordinatenvektoren  $u$  heißen dual zueinander.

**Wie kann man den Schnitt von n Hyperbenen des  $\mathcal{P}^n$  berechnen?**

Ein Unterraum  $\mathcal{A} := \mathfrak{a}_0 \sqcup \dots \sqcup \mathfrak{a}_k \subset \mathcal{P}$  geht beim Dualisieren in den Unterraum  $\mathcal{A}^* := \mathcal{A}_0 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{A}_k \subset \mathcal{P}^*$  über, aber meist stellt man den Unterraum  $\mathcal{A}^*$  durch den polaren Unterraum  $\mathcal{A}^{\circ} := \mathcal{A}_0 \cap \dots \cap \mathcal{A}_k \subset \mathcal{P}$  dar und bezeichnet auch  $\mathcal{A}^{\circ}$  als den zu  $\mathcal{A}$  dualen Unterraum.

Die Hyperebene  $\mathcal{U} = \mathfrak{a}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathfrak{a}_n : \mathfrak{u}^t = [\mathfrak{a}_1 \wedge \dots \wedge \mathfrak{a}_n]^t$  ist dual zum Punkt  $\mathcal{U}^* = \mathcal{A}_1 \cap \dots \cap \mathcal{A}_n = \{\mathfrak{u}\} : \mathfrak{u} = \mathfrak{a}_1 \wedge \dots \wedge \mathfrak{a}_n$ .

**5.5 Projektive Abbildungen**

**Was ist eine projektive Abbildung?**

Jede lineare Abbildung  $\varphi : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \mathfrak{x} \mapsto \mathbb{A}\mathfrak{x}$ , induziert eine projektive Abbildung  $\Phi : \mathcal{P}^m \rightarrow \mathcal{P}^n$ , die durch die gleiche Matrix  $\mathbb{A}$  wie  $\varphi$  dargestellt wird:  $y = \Phi(x) : \mathbb{A}\mathfrak{x} = [\mathfrak{a}_0 \dots \mathfrak{a}_m]\mathfrak{x}$ .

Dabei repräsentieren die Koordinatenvektoren  $\mathfrak{a}_0 \dots \mathfrak{a}_m (\mathfrak{a}_0 + \dots \mathfrak{a}_m)$  die Bilder des Koordinaten-Grunddecks.

**Wann hat eine projektive Abbildung einen Ausnahmerraum und wie ist er definiert?**

Die projektive Abbildung  $\Phi$  heißt regulär oder Projektivität, wenn  $\mathbb{A}$  eine reguläre Matrix ist. Der Kern der Matrix repräsentiert den Ausnahmerraum  $\mathcal{A}_{\Phi} := \text{kern } \mathbb{A} = \{\mathfrak{x} \mid \mathbb{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{0}\}$  von  $\Phi$ . Es ist der Raum, der durch  $\Phi$  auf den Unpunkt abgebildet wird.

**Auf was bilden projektive Abbildungen projektive Unterräume ab?**

Projektivitäten bilden projektive Unterräume auf projektive Unterräume ab und allgemein bildet eine projektive Abbildung  $\Phi$  jeden projektiven Unterraum  $\mathcal{U}$  ohne den Ausnahmerraum auf einen projektiven Unterraum ab:  $\Phi : \mathcal{U} \setminus \mathcal{A}_{\Phi} \mapsto \Phi(\mathcal{U} \setminus \mathcal{A}_{\Phi})$ .

Zu zwei Grunddecken  $\mathfrak{p}_0 \dots \mathfrak{p}_n \mathfrak{p}$  und  $\mathfrak{q}_0 \dots \mathfrak{q}_n \mathfrak{q}$  zweier projektiver Räume gibt es genau eine Projektivität  $\Phi$ , die das erste auf das zweite abbildet, d.h. die  $\Phi(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{q}_i$  und  $\Phi(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$  erfüllt.

**5.6 Kollineationen und Korrelationen**

**Was sind Kollineationen und Korrelationen?**

Projektivitäten  $\Phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  heißen Kollineationen, weil sie kollineare Punkte auf kollineare Punkte abbilden, und Projektivitäten  $\Phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^*$  heißen Korrelationen.

**Wie ist Dualität allgemein definiert?**

Die Dualitätsdefinition besagt, dass eine Figur, d.h. ein aus Unterräumen eines projektiven Raums bestehendes Gebilde, dual zu einer zweiten ist, wenn sie durch eine Korrelation in diese überführt werden kann.

**Wie lautet der Satz von Desargues und wie der dazu duale Satz?**

Sind die Ecken zweier Dreiecke in perspektivischer Lage, dann sind es auch ihre Kanten.

(Sind die Kanten zweier Dreiecke in perspektivischer Lage, dann sind es auch ihre Ecken.)

**5.7 Linear rationale Transformationen**

**Wie lassen sich Projektivitäten zwischen zwei Geraden darstellen?**

Eine Projektivität zwischen zwei Geraden hat die

Darstellung  $\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}$  oder nach

Inhomogenisierung die Darstellung

$\frac{y_1}{y_0} = \frac{cx_0 + dx_1}{ax_0 + bx_1} = \frac{c + d \frac{x_1}{x_0}}{a + b \frac{x_1}{x_0}}$  bzw., wenn wir die projektiven

Skalen  $x = \frac{x_1}{x_0}$  und  $y = \frac{y_1}{y_0}$  verwenden, die Darstellung

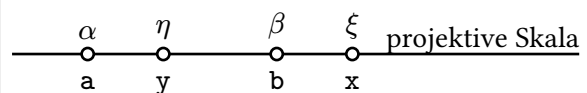
$y = \frac{cx_0 + dx_1}{ax_0 + bx_1} = \frac{c + dx}{a + bx}$ . Letztere ist eine linear-rationale

Transformation der projektiven Skala  $x$ .

**5.8 Das Doppelverhältnis**

**Was ist das Doppelverhältnis?**

Hier betrachten wir vier Punkte  $a, b, x$  und  $y$  einer Geraden mit den projektiven Skalenwerten  $\alpha, \beta, \xi$  und  $\eta$  bzgl. irgendeines Grunddecks.



Das Doppelverhältnis der Punktpaare  $xy$  und  $ab$  ist der Wert  $\delta = DV[xy \mid ab] := \frac{\xi - \alpha}{\xi - \beta} : \frac{\eta - \alpha}{\eta - \beta}$ .

**Warum sind Doppelverhältnisse invariant unter projektiven Abbildungen?**

Weil die Matrix einer projektiven Abbildung  $\Phi$  die Einheitsmatrix ist, wenn wir sie für die Urbild- und Bildkoordinaten bezüglich des Grunddecks  $aby$  bzw.  $\Phi(a)\Phi(b)\Phi(y)$  beschreiben, ändern projektive Abbildungen Doppelverhältnisse nicht.

Doppelverhältnisse treten daher im projektiven Raum an die Stelle der Teilverhältnisse, da letztere nur affine Invarianten sind.

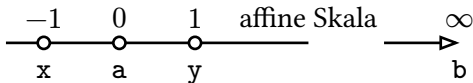
### Was ist das harmonische Doppelverhältnis?

Für das harmonische Doppelverhältnis  $\delta = -1$  liegen  $xy$  und  $ab$  in harmonischer Lage.

### Was bedeutet harmonische Lage von vier kollinearen Punkten, wenn einer von ihnen ein Fernpunkt ist?

Für  $\delta = -1$  liegen  $xy$  und  $ab$  in harmonischer Lage.

Ist  $b$  ein Fernpunkt, ist  $\delta$  eine affine Skala und für  $\delta = -1$  ist  $a = \frac{x+y}{2}$ .



### Unter welchen Vertauschungen ist das harmonische Verhältnis invariant?

Das harmonische Doppelverhältnis  $\delta = -1$  ist invariant gegenüber den Vertauschungen  $x \leftrightarrow y, xy \leftrightarrow ab, a \leftrightarrow b$ .

## 5.9 Die duale Abbildung

### Was ist die duale Abbildung?

Sei  $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}, x \mapsto Ax$  eine projektive Abbildung. Unter ihr hat eine Hyperebene  $\mathcal{V} : v^t y = 0$  von  $\mathcal{Y}$  das Urbild  $\Phi^{-1}\mathcal{V} = \{x \in \mathcal{X} \mid v^t Ax = 0\} : u^t = v^t A$ . Die Abbildung  $\Phi^* : \mathcal{Y}^* \rightarrow \mathcal{X}^*, v^t \mapsto A^t v$  ist die duale Abbildung zu  $\Phi$ . Ist sie bijektiv, bildet ihre Inverse jede Hyperebene  $\mathcal{U}$  auf die Hyperebene  $\mathcal{V}$  ab, in die  $\Phi$  alle Punkte von  $\mathcal{U}$  abbildet.

Da  $A^{tt} = A$ , ist die duale Abbildung  $\Phi^{**}$  der dualen Abbildung  $\Phi^*$  wieder die Ausgangsabbildung  $\Phi$ .

## 5.10 Quadriken

### Was ist eine Quadrik?

Eine Quadrik im  $\mathcal{P}^n$  besteht aus den Punkten  $x$ , deren homogene Koordinatenvektoren  $x^t = [\varepsilon, x^t]x_0$  eine quadratische Gleichung erfüllen:

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^t Q x \\ &= [\varepsilon x_0, x^t x_0] \begin{bmatrix} q & q^t \\ q & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon x_0 \\ x x_0 \end{bmatrix} \\ &\sim x^t Q x + 2\varepsilon q^t x + q\varepsilon^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

### Warum können wir annehmen, dass die Matrix einer Quadrik symmetrisch ist?

Da  $Q + Q^t$  ebenfalls  $Q$  repräsentiert, nehmen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit an, dass  $Q = Q^t$  symmetrisch ist.

### Was ist die Fernquadrik und der affine Teil einer projektiven Quadrik?

Für  $\varepsilon = 1$ , erhält man den affinen Teil  $Q_{\text{aff}}$  von  $Q$  und für  $\varepsilon = 0$  die Fernquadrik  $Q_\infty$ . Die Fernpunkte von  $Q$  heißen asymptotic directions und  $Q = Q_{\text{aff}} \cup Q_\infty$  auch projektive Erweiterung von  $Q_{\text{aff}}$ . Die Quadrik  $Q$  heißt regulär, wenn ihre Matrix  $Q$  regulär ist.

### Was ist eine Quadrik in einer projektiven Gerade?

## 5.11 Tangential- und Polarebenen

### Wie berechnet man die Tangentenquadrik einer Quadrik?

Um die Tangentialebenen (genauer Tangentialhyperebenen) einer Quadrik  $Q$  zu bestimmen, betrachten wir zunächst einen Punkt  $p$  der Quadrik  $Q$  und einer Geraden  $\mathcal{T} : x = p + q\lambda$  des  $\mathcal{P}^n$ . (Dabei stellt  $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$  eine projektive Skala auf  $\mathcal{T} : x = p\lambda_0 + q\lambda_1$  dar.) Nur wenn die Gerade  $\mathcal{T}$  die Quadrik allein im Punkt  $p$  berührt oder ganz auf der Quadrik liegt ist sie eine Tangente. Folglich ist  $\mathcal{T}$  Tangente genau dann, wenn die quadratische Gleichung

$$\begin{aligned} Q(x(\lambda)) &= x^t Q x \\ &= p^t Q p + 2p^t Q q \lambda + q^t Q q \lambda^2 \\ &= 2p^t Q p \lambda + q^t Q q \lambda^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

eine doppelte Nullstelle  $\lambda = 0$  hat. Somit ist  $\mathcal{T}$  Tangente von  $Q$  genau dann, wenn  $p^t Q q = 0$ . Weiter folgt, dass die Tangentialebene von  $Q$  in  $p$  die Gleichung  $u^t x = q^t Q x = 0$  hat.

### Was sind Polarebenen?

Für einen beliebigen Punkt  $p \in \mathcal{P}^n$ , definiert die Gleichung  $p^t Q x = 0$  die Polarebene (oder eigentlich Polarhyperebene)  $\mathcal{P}(p, Q)$  von  $p$  bezüglich  $Q$ , sofern  $p$  kein singulärer Punkt ist. Sie schneidet  $Q$  in den Punkten  $x$ , deren Tangentialebenen  $\mathcal{T} \subset Q_x$  auch durch  $p$  gehen. Liegt  $p$  auf  $Q$ , ist die Polarebene die Tangentialebene von  $Q$  in  $p$ .

### Was bilden die Tangentialebenen einer Quadrik?

Auch die Tangentialebenen einer Quadrik  $\mathcal{Q}$  bilden eine Quadrik im Dualraum. Dazu macht man sich klar, dass ein  $u$  eine Tangentialebene von  $\mathcal{Q}$  in einem Punkt  $p$  von  $\mathcal{Q}$  darstellt, falls das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}p - u\rho &= 0 \\ u^t p &= 0 \end{aligned}$$

für  $p$  und  $\rho$  lösbar ist, d.h. falls  $\det \begin{bmatrix} \mathbb{Q} & u \\ u^t & 0 \end{bmatrix} = 0$ .

Letzteres ist eine quadratische Gleichung und stellt die duale Quadrik  $\mathcal{Q}^*$  zu  $\mathcal{Q}$  dar.

### Was ist eine Polarität?

Ist die Matrix  $\mathbb{Q}$  regulär, heißt die Korrelation  $x \mapsto x^t \mathbb{Q}$  die Polarität bezüglich  $\mathcal{Q}$ . Sie bildet die Punkte von  $\mathcal{Q}$  auf die zugehörigen Tangentialebenen ab und  $\mathcal{Q}$  auf die duale Quadrik  $\mathcal{Q}^*$ , deren Punkte  $u \triangleleft u := \mathbb{Q}x$  die Gleichung  $u^t \mathbb{Q}^{-1} u = 0$  erfüllen. Polaritäten sind also Korrelationen oder Dualitäten mit symmetrischer Matrix.

### Ist jede Korrelation eine Polarität?

Polaritäten sind Korrelationen oder Dualitäten mit symmetrischer Matrix.

### Was bedeutet dies für den Begriff der Dualität?

Bsp. Die Dualität  $x \mapsto \mathcal{X}$  ist die Polarität zur leeren regulären Quadrik  $\mathcal{Q} \triangleleft \mathbb{E}$ .

## 5.12 Harmonische Punkte und Polarität

Was ist das Doppelverhältnis von  $pq$  und  $xy$ , wenn  $q$  auf der Polaren von  $p$  bezüglich einer Quadrik  $\mathcal{Q}$  liegt und  $x$  und  $y$  die Schnittpunkte der Geraden  $pq$  mit  $\mathcal{Q}$  sind?

## 5.13 Normalform

### Was ist die Normalform einer Quadrik?

Mit einer reellen Koordinatentransformation kann die Gleichung einer Quadrik  $\mathcal{Q}$  in die Normalform  $y_0^2 + \dots + y_r^2 - y_{r+1}^2 - \dots - y_{r+s}^2 = 0$  und anschließend mit der komplexen Koordinatentransformation  $y = \text{diag}(1 \dots 1 i \dots i)z$  in die Normalform  $z_0^2 + \dots + z_{r+s}^2 = 0$  überführt werden.

Wie viele projektiv verschiedene Quadriken gibt es im reellen projektiven Raum und wie viele im in seiner komplexen Erweiterung?

# 6 Hyperbolische Geometrie

## 6.1 Das hyperbolische Modell

### Erklären Sie das hyperbolische Modell der hyperbolischen Ebene!

Im hyperbolischen Modell wird die hyperbolische Ebene  $\mathcal{H}^2$  durch die obere Schale des zweischaligen Hyperboloids

$$\mathcal{O} : x^t H x = [x, y, z] \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -1, z > 0 \quad \text{im } \mathbb{R}^3$$

dargestellt. Der asymptotische Kegel  $\mathcal{K}$  von  $\mathcal{O}$  hat die Gleichung  $\mathcal{K} : x^t H x = 0$  und ist in der Abbildung rot gezeichnet.

### Was sind in diesem Modell die hyperbolischen Geraden?

In diesem Modell sind die hyperbolischen Geraden durch die nicht leeren Schnitte von  $\mathcal{O}$  mit den zweidimensionalen linearen Unterräumen des  $\mathbb{R}^3$  gegeben. Es sind Pyperbeläste auf  $\mathcal{O}$ .

### Was sind die hyperbolischen Abbildungen in diesem Modell?

Die regulären linearen Abbildungen des  $\mathbb{R}^3$ , die  $\mathcal{O}$  auf sich abbilden, und ihre Vielfachen repräsentieren die hyperbolischen Abbildungen, wenn wir sie auf  $\mathcal{O}$  beschränken und die Vielfachen der  $x \in \mathcal{O}$  als homogene Koordinatenvektoren für die Punkte des  $\mathcal{H}^2$  auffassen. Zu diesen linearen Abbildungen gehören unter anderem Rotationen um die  $z$ -Achse und Spiegelungen an Ebenen durch die  $z$ -Achse.

Die hyperbolischen Abbildungen werden durch die Matrizen  $A$  repräsentiert, für die  $A^t H A = \rho H$  mit  $\rho > 0$ .

Da der Kegel  $\mathcal{K}$  durch die Gleichung  $x^t \rho H x = 0$  gegeben ist, stellen die linearen Abbildungen, die den Kegel auf sich abbilden, die hyperbolischen Abbildungen dar.

### Nennen Sie einfache Beispiele für hyperbolische Abbildungen in diesem Modell!

## 6.2 Das Klein-Modell

### Wie ist das Klein-Modell der hyperbolischen Ebene definiert?

Aus dem hyperbolischen Modell der hyperbolischen Ebene erhalten wir durch die Zentralprojektion  $\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$ , das Klein-Modell der hyperbolischen Ebene. Die Zentralprojektion  $\pi$  bildet  $\mathcal{O}$  auf die offene Einheitskreisscheibe  $\mathcal{D} : x^2 + y^2 < 1, z = 1$  ab.

### Was sind in diesem Modell die hyperbolischen Geraden?

Hyperbolische Geraden in bildet die Zentralprojektion  $\pi$  auf die geraden Strecken, die sich ergeben, wenn die Scheibe  $\mathcal{D}$  mit den zweidimensionalen Unterräumen des  $\mathbb{R}^3$  geschnitten wird.

### Was sind die hyperbolischen Abbildungen in diesem Modell?

Unter der Projektion  $\pi$  werden die linearen Abbildungen des  $\mathbb{R}^3$  und ihre Vielfachen je zu einer linear rationalen Abbildung der Ebene  $z = 1$ , das heißt, dass eine lineare Abbildung und ihre Vielfachen eine projektive Abbildung der linearen Abbildung auf  $\mathcal{O}$  entspricht der Beschränkung der projektiven Abbildung auf  $\mathcal{D}$ .

Folglich sind die hyperbolischen Abbildungen im Klein-Modell die auf  $\mathcal{D}$  beschränkten Projektivitäten der Ebene  $z = 1$ , die  $\mathcal{D}$  bzw., wenn nicht beschränkt, den Kreis  $\pi\mathcal{K} = \text{Rand } \mathcal{D}$  auf sich abbilden.

### Wie sind Entfernungen definiert?

Eine Strecke  $xy$  hat die Länge  $\text{dist}(x, y) = |\log DV[xy \mid ab]|$  wobei  $a$  und  $b$  die Fernpunkte der hyperbolischen Geraden  $xy$  sind. Man beachte, dass die Vertauschung der Punkte  $a$  und  $b$  oder der Punkte  $x$  und  $y$  das Doppelverhältnis invertiert und daher nur das Vorzeichen seines Logarithmus ändert.

(Der Rand der Kreisscheibe  $\mathcal{D}$  heißt Fernkreis. Er gehört nicht zur hyperbolischen Ebene. Seine Punkte werden Fernpunkte genannt und die Punkte außerhalb des Fernkreises Ultra-Fernpunkte.)

### Warum sind Entfernungen invariant unter hyperbolischen Abb.

## 6.3 Spiegelungen

### Wie ist eine hyperbolische Spiegelung definiert?

Eine hyperbolische Spiegelung oder harmonische Homologie ist eine hyperbolische Abbildung  $y = \Phi(x)$  mit einer Fixpunktgeraden  $\mathcal{P}$ , bei der die Geraden  $x \perp \Phi(x)$  alle durch den Pol  $p$  zur Polare  $\mathcal{P}$  bezüglich des Fernkreis gehen. Es sind also Perspektivitäten, die  $\mathcal{D}$  auf sich abbilden.

### Was muss man tun, um eine hyperbolische Spiegelung als euklidische Spiegelung anzusehen?

Betrachtet man den Pol  $p$  als Fernpunkt einer euklidischen Ebene, entspricht die hyperbolische Spiegelung einer Spiegelung der euklidischen Ebene an  $\mathcal{P}$ . Die Polare geht bei dieser Betrachtung durch den Mittelpunkt von  $\mathcal{D}$ .

### Wie geht man vor, um zu zeigen, dass jede hyperbolische Abb. Produkt von Spiegelungen ist?

Bildet  $\Phi$  eine Gerade  $\mathcal{P}$  und einen Punkt  $r \in \mathcal{P}$  auf sich ab, bildet sie die Fernpunkte  $a$  und  $b$  von  $\mathcal{P}$  mit den zugehörigen Tangenten des Fernkreis auf sich ab oder vertauscht sie.

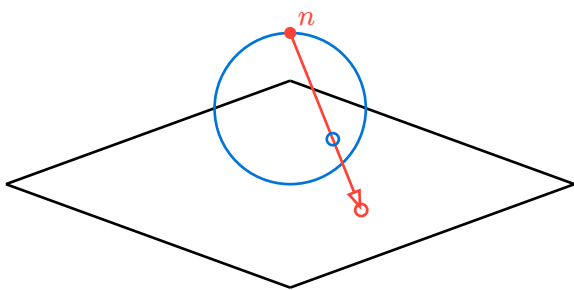
Sie bildet daher auch den Pol  $p$  zu  $\mathcal{P}$  und die Gerade  $\mathcal{Q}$  durch  $p$  und  $r$  auf sich ab. Da  $\Phi$  durch die Bilder der Fernpunkte von  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{Q}$  bestimmt ist, kann  $\Phi$  nur die Identität, die Spiegelung an  $\mathcal{P}$ , die an  $\mathcal{Q}$  oder die Verknüpfung dieser beiden Spiegelungen sein.

## 6.4 Kreisverwandtschaften

### Was ist eine stereographische Projektion?

Eine stereographische Projektion ist eine Zentralprojektion vom Nordpol  $n$  einer Kugel aus auf die Tangentialebene am Südpol, die auf die Kugel beschränkt wird und eindeutig jedem Punkt der Kugel mit Ausnahme des Nordpols einen Punkt der Ebene zuordnet.

Für den Nordpol erweitert man die Ebene um einen gedachten unechten Punkt  $k$  und erklärt  $k$  als das stereographische Bild von  $n$ . (Durch  $k$  wird die Ebene kompaktifiziert.) Die Kreise durch den Nordpol werden durch die stereographische Projektion auf die Geraden der Ebene abgebildet und ihnen eindeutig zugeordnet. Die Geraden heißen unechte Kreise und sind genau die Kreise, die durch  $k$  gehen.



### Warum sind stereographische Projektionen winkel- und kreistreu?

Zum Beweis der Winkeltreue, sehen wir uns zwei Tangenten der Kugel in einem Punkt  $p$  an und dazu die beiden Kreise durch  $p$  und  $n$  mit diesen Tangenten. Diese Kreise schneiden sich im Nordpol im gleichen Winkel und die Tangenten im Nordpol sind parallel zu den Bildtangente, da diese beiden Tangentenpaare Schnitte der beiden Kreisebenen mit den Tangentialebenen der Kugel im Nord- und Südpol sind. Das beweist die Winkeltreue.

Kreise, die nicht den Nordpol gehen, werden auf Ellipsen abgebildet. Um zu zeigen, dass diese Ellipsen Kreise sind, betrachten wir zu einem Kreis der Kugel den Tangentialkegel, der die Kugel in diesem Kreis berührt. Die Mantellinien des Kegels schneiden den Kreis orthogonal und werden auf Geraden abgebildet, die alle durch das Bild der Kegelspitze gehen und wegen der Winkeltreue das Bild des Kreises orthogonal schneiden. Deshalb kann das Bild nur ein Kreis sein.

### Was sind Kreisverwandtschaften?

Kreisverwandtschaften sind bijektive Abbildungen, die Kreise und nur Kreise auf Kreise abbilden. Beispielsweise sind stereographische Projektionen Kreisverwandtschaften.

### Was ist eine Inversion an einem Kreis?

Jeder echte Kreis  $\mathcal{K}$  einer Ebene, ist Bild eines Kugeläquators unter einer stereographischen Projektion  $\pi$ . Bezeichnet  $\rho$  die Spiegelung der Kugel an der Äquatorebene, ist  $\pi \circ \rho \circ \pi^{-1}$  die Inversion der Ebene an  $\mathcal{K}$ .

### Wie kann man Kreis inversionen berechnen?

Invertiert man einen Punkt  $x$  an einem Kreis mit Radius  $r$  und Mittelpunkt  $m$  gilt für den Bildpunkt  $y$ :  
 $\|x - m\| \cdot \|y - m\| = r^2$ .

### (Warum) sind Kreis inversionen winkeltreu?

Eine Inversion an einem Kreis  $\mathcal{K}$  ist eine winkeltreue Kreisverwandtschaft, die  $\mathcal{K}$  punktweise auf sich und den Mittelpunkt auf  $k$  abbildet. Daher bildet sie auch zu  $\mathcal{K}$  orthogonale Kreise auf sich ab.

### Warum sind Kreis inversionen Kompositionen von Ähnlichkeiten und Kreis inversionen?

- (1) Eine Kreisverwandtschaft  $\kappa$ , die den Punkt  $k$  fest lässt, bildet ein Quadratgitter wieder auf ein solches ab, weil sie die einbeschriebenen Kreise auf Kreise abbildet. Somit ist sie eine Ähnlichkeit.
- (2) Bildet  $\kappa$  den Punkt  $k$  auf einen anderen Punkt  $m$  ab, betrachten wir die Inversion  $\iota$  an einem Kreis mit Mittelpunkt  $m$ . Weil  $\iota \circ \kappa$  nach (1) eine Ähnlichkeit  $\alpha$  ist, hat auch  $\kappa = \iota \circ \iota \circ \kappa = \iota \circ \alpha$  die behauptete Zerlegung.

## 6.5 Das Poincaré-Modell

### Wie ist das Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene definiert?

Das Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene erhalten wir aus dem Klein-Modell, indem wir die Kreisscheibe  $\mathcal{D}$  als orthogonale Projektion einer auf ihr liegenden Kugel auffassen und das Klein-Modell der hyperbolischen Ebene zurück nach oben auf die untere Hälfte der Kugel projizieren.

Vom Nordpol der Kugel projiziert man die untere Halbkugel stereographisch wieder zurück auf die Ebene von  $\mathcal{D}$  und erhält so das Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene.

### Was sind in diesem Modell die hyperbolischen Geraden?

Aus den hyperbolischen Geraden werden Halbkreise, die orthogonal vom Äquator der Kugel weg nach unten hängen.

Die hyperbolischen Geraden entsprechen im Poincaré-Modell Kreisbögen, die orthogonal vom Fernkreis weglafen.

### Was sind die hyperbolischen Spiegelungen in diesem Modell?

Die hyperbolischen Abbildungen werden im Poincaré-Modell zu Abbildungen, die den Fernkreis auf sich abbilden. insbesondere wird aus einer hyperbolischen Spiegelung an einer Polagen eine Inversion an einem zum Fernkreis orthogonalen Kreis, dessen Mittelpunkt  $m$  der Pol der Spiegelung ist.

### Warum sind die hyperbolischen Abb. genau die Kreisverwandtschaften, die den Fernkreis auf sich abbilden?

Die projektiven Geraden durch den Pol gehen bei der Spiegelung und der Inversion in sich über. Jede hyperbolische Gerade hat im Klein- als auch im Poincaré-Modell zwei Fernpunkte auf dem Fernkreis und ist durch diese festgelegt. Weil die Fernpunkte sowohl durch die Spiegelung als auch durch die Inversion auf sich abgebildet werden, wird jede Gerade in die gleiche aber unterschiedlich als Strecke oder Kreissegment dargestellte Gerade gespiegelt bzw. invertiert. Da jeder Punkt Schnitt von zwei Geraden ist, folgt die Behauptung.

### Wie ist der hyperbolische Winkel definiert?

Der Winkel, in dem sich zwei hyperbolische Geraden im Poincaré-Modell schneiden, ist ihr hyperbolischer Winkel. Er ist invariant unter hyperbolischen Abbildungen.

### Warum bleiben Winkel unter hyperbolischen Abb. invariant?

## 6.6 Fundamentalgebiete

### Wie groß ist die Winkelsumme eines hyperbolischen Dreiecks?

Die Winkelsumme in einem hyperbolischen Dreieck ist kleiner als  $180^\circ$ .

(Die Winkelsumme eines Dreiecks der euklidischen Ebene ist  $180^\circ$  und für ein Kugeldreieck größer als  $180^\circ$ .)

### Warum ist die Winkelsumme eines hyperbolischen Dreiecks kleiner als $180^\circ$ ?

Jedes hyperbolische Dreieck  $o'p'q'$  kann durch eine Spiegelung (winkelerhaltend) in ein Dreieck  $opq$  überführt werden, bei dem z.B.  $o$  Mittelpunkt der Kreisscheibe  $\mathcal{D}$  ist. Die zu dieser Ecke adjazenten Kanten liegen dann auf Durchmessern der Kreisscheibe. Nur der Winkel bei  $o$  entspricht dem des euklidischen Dreiecks  $opq$ , während die beiden anderen kleiner als die entsprechenden des euklidischen Dreiecks sind.

### Wie groß können die Winkelsummen regelmaßiger $n$ -Ecke sein?

Die Winkelsummen aller regelmäßigen  $n$ -Ecke bilden das Intervall  $(0, (n-2)180^\circ)$ . Zu jeder Winkelsumme aus diesem Intervall gibt es also regelmäßige  $n$ -Ecke.

Ein regelmäßiges  $n$ -Eck ist ein Polygon, dessen Kantenlängen und Winkel alle gleich groß sind.

### Was ist ein Fundamentalgebiet?

Ein regelmäßiger  $n$ -Eck mit Winkelsumme  $360^\circ$  ( $n > 4$ ) heißt Fundamentalgebiet.

### Was ist eine Fuchssche Gruppe?

Bei einem Fundamentalgebiet  $\mathcal{Q}$  (regelmäßiger  $n$ -Eck mit Winkelsumme  $360^\circ$ ) existieren  $n$  (nicht eindeutige) Drehungen  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  mit  $\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_n = \text{id}$ , sodass die Bilder  $\varphi\mathcal{Q}$  für  $\varphi = \rho_1 \circ \dots \circ \rho_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  und  $\rho_1 \dots \rho_k \in \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ , die hyperbolische Ebene  $\mathcal{H}^2$  zerlegen.

Die  $\varphi_i$  erzeugen eine Fuchs-Gruppe. Allgemeiner ist eine Fuchssche Gruppe eine Gruppe hyperbolischer Abbildungen, die ein, auch nicht regelmäßiges Polygon auf Polygone abbildet, welche die hyperbolische Ebene  $\mathcal{H}^2$  zerlegen.

## 6.7 Orbifaltigkeiten

### Was ist eine Orbifaltigkeit?

Die Oberfläche eines Körpers mit  $\gamma$  hindurchführenden Tunneln ist eine Fläche vom topologischen Geschlecht  $\gamma$ . Solch eine Fläche kann aufgeschnitten und über dem Fundamentalgebiet einer Fuchs'schen Gruppe parametrisiert werden.

Indem man eine Fläche über einem Fundamentalgebiet parametrisiert und ihre Parametrisierung periodisch über einer zugehörigen Kachelung der hyperbolischen Ebene fortsetzt, erhält man eine Orbifaltigkeit. Die periodische Fortsetzung hilft, glatte, d.h. differenzierbare Parametrisierungen für solche Flächen zu konstruieren, die von beliebiger Glattheitsordnung sind. Man kann so stückweise rationale Splineorbifaltigkeiten konstruieren, deren Grad nur um eins höher als ihre Differenzierbarkeitsordnung ist.